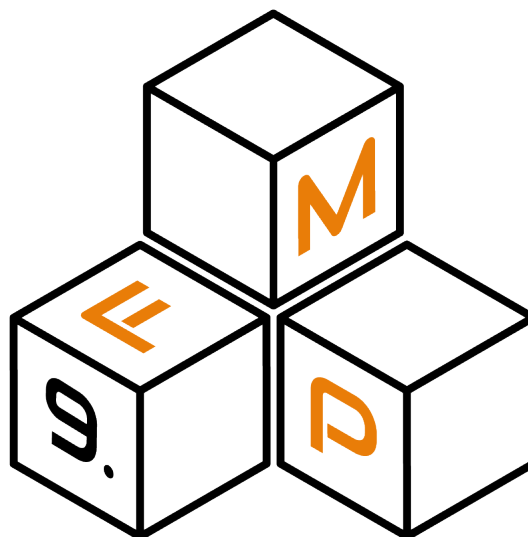


# 9. FORUM MATEMATYKÓW POLSKICH



9–13 września, 2024, Katowice

Edytorzy: Michał Baczyński, Jacek Miękiś, Maciej Sablik

## Organizatorzy

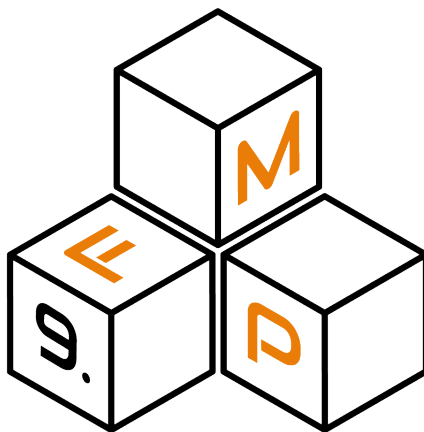


## Współorganizatorzy





# 9. FORUM MATEMATYKÓW POLSKICH



9–13 września, 2024, Katowice

## Książka streszczeń 9. FORUM MATEMATYKÓW POLSKICH

Edytorzy: Michał Baczyński, Jacek Miękiś, Maciej Sablik

### Organizatorzy



UNIWERSYTET ŚLĄSKI  
W KATOWICACH

### Współorganizatorzy



Politechnika  
Śląska



UNIWERSYTET  
IM. ADAMA MICKIEWICZA  
W POZNANIU

Michał Baczyński, Jacek Miękiś, Maciej Sablik  
Książka streszczeń 9. FORUM MATEMATYKÓW POLSKICH

Copyright © 2024 by  
Polskie Towarzystwo Matematyczne  
Wszystkie prawa zastrzeżone

ISBN: 978-83-962157-5-8

Skład i łamanie: Katarzyna Miś

# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>19</b>
<b>Organizatorzy</b>	<b>21</b>
<b>Laureaci nagród PTM</b>	<b>23</b>
<b>O związkach kombinatoryki addytywnej z teorią ergodyczną i analizą Fouriera</b>	
<i>M. Mirek</i> . . . . .	24
<b>Homologie persystentne przez pryzmat kombinatorycznej dynamiki topologicznej</b>	
<i>M. Mrozek</i> . . . . .	25
<b>Co ciągłe funkcje wiedzą o swojej dziedzinie?</b>	
<i>D. Głodkowski</i> . . . . .	26
<b>Niezależne od wymiaru oszacowania norm transformat Riesz</b>	
<i>M. Kucharski</i> . . . . .	27
<b>Laureaci Międzynarodowej Nagrody im. Stefana Banacha</b>	<b>29</b>
<b>Rearrangement-invariant quasi-Banach function spaces and their amalgams</b>	
<i>D. Peša</i> . . . . .	30
<b>Podgrupy torsyjne grup małych skreśleń</b>	
<i>K. Duda</i> . . . . .	31
<b>Wykłady plenarne</b>	<b>33</b>
<b>Algebraiczna grupa Sato-Tate'a i Hipoteza Sato-Tate'a</b>	
<i>G. Banaszak</i> . . . . .	34
<b>Matematyka kształtu: krótki wstęp do topologicznej analizy danych</b>	
<i>P. Dłotko</i> . . . . .	35
<b>Geometria przestrzeni lokalnie symetrycznych</b>	
<i>M. Frączyk</i> . . . . .	36

<b>Pewne wyniki dotyczące arytmetyki ciał funkcyjnych</b>	
<i>P. Krason</i> . . . . .	37
<b>Opowieści o inteligencji Naturalnej i Sztucznej</b>	
<i>J. Tabor</i> . . . . .	39
<b>Półgrupy operatorów. Stosować czy nie stosować?</b>	
<i>M. Tyran-Kamińska</i> . . . . .	40
<b>Kolorowanie grafów bez dużych klik</b>	
<i>B. Walczak</i> . . . . .	41
<b>Analiza modeli hydrodynamicznych zachowań kolektywnych</b>	
<i>E. Zatorska</i> . . . . .	42
<b>Odczyty w ramach otwartej sesji dydaktycznej</b>	<b>43</b>
<b>Nauczanie matematyki oparte o badania</b>	
<i>M. Jakubowski</i> . . . . .	44
<b>Neurorozwojowe aspekty nauczania matematyki</b>	
<i>M. Kaczmarzyk</i> . . . . .	45
<b>Odczyty specjalne</b>	<b>47</b>
<b>Stanisław Łojasiewicz i kariera jego nierówności w matematyce</b>	
<i>B. Jakubczyk</i> . . . . .	48
<b>Intuicja i metoda – matematyczne inspiracje w sztuce</b>	
<i>J. Jernajczyk</i> . . . . .	49
<b>Aproksymacja, własności wielomianowe i metody geometryczne w analizie</b>	<b>51</b>
<b>O nierównościach typu Bernsteina</b>	
<i>T. Beberok</i> . . . . .	52
<b>O regularności rozwiązań problemu Dirichleta dla zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a</b>	
<i>R. Czyż</i> . . . . .	53
<b>O niezmienniczości wykładnika Łojasiewicza</b>	
<i>R. Dzhaфарov</i> . . . . .	54
<b>Zastosowania zbieżności Painlevé - Kuratowskiego: funkcje lipschitzowskie ze zbieżnymi sub-różniczkami Clarke'a oraz zbieżność zbiorów zbiorów zdefiniowanych przez zbieżne równania</b>	
<i>D. Fatula</i> . . . . .	55

Uogólniona nierówność Łojasiewicza dla multifunkcji definiowalnych i subanalitycznych <i>M. Kosiba</i> . . . . .	56
Nierówności wielomianowe na zbiorach algebraicznych <i>A. Kowalska</i> . . . . .	57
Aproksymacja stałych Lebesgue'a za pomocą siatek punktów Czebyszewa <i>M. Suder</i> . . . . .	58
<b>Badania z zakresu dydaktyki matematyki</b>	<b>59</b>
Kilka uwag o pisaniu prac dydaktycznych z algebry <i>W. Hołubowski</i> . . . . .	60
Analiza wybranych modeli rozwiązań realistycznych zadań z optymalizacji liniowej przez studentów z wykorzystaniem technik komputerowych <i>A. Karpowicz</i> . . . . .	61
Przejawy rozumowania matematycznego u małych dzieci na podstawie zadania kombinatorycznego <i>B. Maj-Tatsis</i> . . . . .	62
Rozumowanie redukcyjne studentów pedagogiki w procesie rozwiązywania zadania tekstowego pt.: Ile było pereł w szkatułce? <i>B. Nawolska</i> . . . . .	64
Rozumienie zagadnienia przekształceń geometrycznych przez nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej <i>M. Pytlak, E. Swoboda</i> . . . . .	66
Współzmiennościowe rozumienie funkcji jako narzędzia do opisu ruchu – badanie z wykorzystaniem eye-trackingu <i>M. Sajka</i> . . . . .	68
Analiza zależności między częstotliwością powrotów do zadań a czasem rozwiązywania zadań wśród licealistów i ósmoklasistów w Polsce <i>J. Stańdo, Ż. Fechner</i> . . . . .	69
<b>Biomatematyka</b>	<b>71</b>
Wpływ opóźnień wynikających z czasu dojrzewania na dynamikę ekologiczno-ewolucyjną w grach ewolucyjnych <i>K. Argasiński, J. Miękiś</i> . . . . .	72

<b>Od wypukłych rozkładów rezolwent do twierdzeń o generowaniu</b>	
<i>A. Gregosiewicz</i> . . . . .	73
<b>Przejścia fazowe w ewolucyjnym Dylemacie Więźnia na grafach Barabási-Alberty</b>	
<i>J. Miękiś</i> . . . . .	74
<b>Niemarkowowski model układu immunologicznego</b>	
<i>K. Pichór, R. Rudnicki</i> . . . . .	75
<b>Granica osobliwa w modelu aktywności białek z rodziny Rho</b>	
<i>A. Bobrowski, A. Madzvamuse, E. Ratajczyk</i> . . . . .	76
<b>Semi-markowskie modele populacyjne</b>	
<i>R. Rudnicki</i> . . . . .	77
<b>Biologiczne zastosowania losowo przełączających się równań ewolucyjnych</b>	
<i>A. Tomski</i> . . . . .	78
<b>Dwuskalowy cząsteczkowy stochastyczny model reakcji-dyfuzji</b>	
<i>R. Wieczorek</i> . . . . .	79
<b>Geometria i topologia rozmaitości wraz z teorią węzłów</b>	81
<b>Klasy homotopii odwzorowań przestrzeni Thoma wiązek wektorowych</b>	
<i>A. Bojanowska</i> . . . . .	82
<b>Klasyfikacja struktur zespolonych na niskowymiarowych algebrach Liego i jej zastosowania</b>	
<i>A. Czarnecki</i> . . . . .	83
<b>O krzywej łańcuchowej nad okręgiem</b>	
<i>M. Czarnecki</i> . . . . .	84
<b>Korespondencja węzeł-kołczan</b>	
<i>P. Kucharski</i> . . . . .	85
<b>Nierozwiązalne grupy Bieberbacha</b>	
<i>R. Lutowski, A. Szczepański</i> . . . . .	86
<b>Klasyfikacja klas homotopii dyffeomorfizmów Morse'a-Smale'a zwartych powierzchni</b>	
<i>W. Marzantowicz</i> . . . . .	87
<b>Minimalne triangulacje przestrzeni o zadanej grupie podstawowej</b>	
<i>Ł. P. Michalak</i> . . . . .	88



Nieznikanie kohomologii grupy $SL_n(\mathbb{Z})$ <i>P. Mizerka</i> . . . . .	89
Liczba skrzyżowań Hopfa i jej związki z innymi niezmiennikami splotów <i>M. Mroczkowski</i> . . . . .	90
Twierdzenia lokalizacyjne dla homologii Khovanova-Rozansky’ego <i>W. Politarczyk</i> . . . . .	91
40 lat wielomanu HOMFLYPT <i>J. H. Przytycki</i> . . . . .	92
Ciąg Spektralny dla Regularnych Izometrycznych Działań Grup Liego <i>P. Rażny</i> . . . . .	93
Węzły, kołczany i kombinatoryka ścieżek <i>P. Sułkowski</i> . . . . .	94
Sfery bez działań gładkich z dokładnie jednym punktem stałym <i>K. Śmietaniak</i> . . . . .	95
Nieściągalna przestrzeń, która jest wstępującą sumą ściągalnych otwartych podprzestrzeni <i>A. Zastrow</i> . . . . .	96
<b>Matematyczne zagadnienia we współczesnej analizie danych</b>	<b>97</b>
Redukcja wymiaru modeli probabilistycznych za pomocą technik regularyzacyjnych <i>M. Bogdan</i> . . . . .	98
Faktów jest mniej niż słów: Prawa potęgowe dla procesów stacjonarnych <i>Ł. Dębowski</i> . . . . .	99
Topologiczne metody wizualizacji danych <i>P. Dłotko</i> . . . . .	101
Optymalna długość bloku bootstrapowego w przypadku okresowo skorelowanych szeregów czasowych <i>A. Dudek</i> . . . . .	102
Algorytmy MCMC oparte o równanie Langevina bez lipschitzowskiej ciągłości gradientu potencjału <i>M. Benko, I. Chlebicka, J. Endal, B. Miasojedow</i> . . . . .	103

Zastosowanie metod topologicznych w statystyce matematycznej na przykładzie wielowymiarowych testów zgodności <i>R. Topolnicki, N. Hellmer, P. Dłotko, Ł. Stettner</i> . . . . .	104
<b>Operatory nielokalne</b>	<b>105</b>
Nielokalne zagadnienia brzegowe <i>K. Bogdan</i> . . . . .	106
Procesy Lévy’ego w obszarach ograniczonych: Nielokalne warunki brzegowe w języku trajektorii <i>P. Garbaczewski</i> . . . . .	107
Nielokalny obwód i krzywizna <i>T. Grzywny</i> . . . . .	108
Stabilność diagramu fazowego dla gradientowego równania zwyczajnego z pamięcią <i>P. Kalita, P. Zgliczyński</i> . . . . .	109
Twierdzenie Bôchera dla operatorów Lévy’ego z zaburzeniem gradientowym: przypadek nadkrytyczny <i>T. Klimsiak</i> . . . . .	110
Tożsamości i nierówności procesów Lévy’ego <i>K. Pietruska-Paluba</i> . . . . .	111
Rozwiązanie samopodobne dla ułamkowego operatora Laplace’a w stożkach <i>D. Pilarczyk</i> . . . . .	112
Stochastyczne równania różniczkowe ze skokami i nieregularnym dryfem – aspekty analityczne i numeryczne <i>P. Przybyłowicz</i> . . . . .	113
O problemie Neumanna dla równań eliptycznych z operatorami typu Lévy’ego <i>A. Rozkosz</i> . . . . .	114
Równania z ułamkowym laplasjanem w zbiorach Lipschitza <i>A. Rutkowski</i> . . . . .	115
Metoda parametrysy dla niesymetrycznych operatorów typu <i>K. Szczypkowski</i> . . . . .	116

Czy zmiany fenotypu z nabłonkowego na mezenchymalny i odwrotnie tłumaczą powstawanie wielogniskowej postaci choroby? Modelowanie matematyczne inwazji nowotworowej <i>Z. Szymańska, M. Lachowicz, N. Sfakianakis, M. A. J. Chaplain</i> . . . . .	117
<b>Przestrzenie Banacha: geometria i operatory</b>	<b>119</b>
Unitarna równoważność dwustronnych przesunięć ważonych z wagami operatorowymi <i>M. Buchała</i> . . . . .	120
Ekstremalne kontrakcje <i>K. Gryszka</i> . . . . .	121
O podprzestrzeniach nierozkładalnych przestrzeni Banacha <i>P. Koszmider</i> . . . . .	122
Twierdzenie Kakutaniego i zbiory Ramseya <i>A. Kryczka</i> . . . . .	123
Najnowsze rezultaty o projekcjach minimalnych <i>G. Lewicki</i> . . . . .	124
Pochodne Lipschitza funkcji typu Takagi-van der Waerdena w przestrzeniach metrycznych <i>O. Maslyuchenko, Z. Wójcicki</i> . . . . .	125
Kombinatoryczne przestrzenie Banacha <i>A. Pelczar-Barwacz</i> . . . . .	126
Przestrzenie $\ell_1$ -predualne zawierające prawie izometryczne kopie przestrzeni $c$ <i>Ł. Piasecki</i> . . . . .	127
Dopełnialne podprzestrzenie $C(K \times L)$ <i>G. Plebanek</i> . . . . .	128
Bazy ideałowe w przestrzeniach Banacha <i>J. Swaczyna</i> . . . . .	129
O stałych spektralnych w przestrzeniach Banacha <i>M. Wojtylak</i> . . . . .	130
<b>Równania różniczkowe cząstkowe</b>	<b>131</b>
Asymptotyczne zachowanie rozwiązań ewolucyjnego równania $p$ -Laplace'a <i>I. Chlebicka</i> . . . . .	132

<b>Mechaniczne modele wzrostu tkanek</b>	
<i>T. Dębiec</i> . . . . .	133
<b>Hiperboliczne równanie Swifta-Hohenberga w <math>\mathbb{R}^N</math></b>	
<i>M. Kania-Błaszczyk, R. Czaja</i> . . . . .	134
<b>Tempo zbieżności algorytmu cząsteczkowego dla równania ośrodka granularnego</b>	
<i>M. Benko, I. Chlebicka, J. Endal, B. Miasojedow</i> . . . . .	135
<b>Regularność rozwiązań dla statycznego, zrelaksowanego modelu mikromorficznego</b>	
<i>S. Owczarek</i> . . . . .	136
<b>Słabe rozwiązania stacjonarnego równania Naviera–Stokesa dla ściśliwych płynów nienewtonowskich</b>	
<i>M. Szlenk</i> . . . . .	137
<b>Płyny ściśliwe na obszarach zmiennych w czasie</b>	
<i>A. Wróblewska-Kamińska</i> . . . . .	138
<b>Dyfuzja i adwekcja w modelach populacyjnych typu Lotki-Volterra</b>	
<i>D. Wrzosek</i> . . . . .	139
<b>Rzeczywista geometria algebraiczna i zagadnienia pokrewne</b>	141
<b>Aproksymacja i interpolacja odwzorowań w rozmaitości jednostajnie retrakcyjnie wymierne</b>	
<i>J. Banecki</i> . . . . .	142
<b>Aproksymacja odwzorowań różniczkowalnych o wartościach w zbiorach algebraicznych</b>	
<i>M. Bilski</i> . . . . .	143
<b>Wielomiany zależne od współczynników parametryzacji Puiseux</b>	
<i>B. Gryszka</i> . . . . .	144
<b>O rozkładzie krzywej polarnej</b>	
<i>J. Gwoździwicz</i> . . . . .	145
<b>Testowanie ciągłości funkcji wymiernych za pomocą specjalnej rodziny krzywych algebraicznych</b>	
<i>F. Kołomyjiec</i> . . . . .	146
<b>Sumy wyższych potęg w rzeczywistej geometrii algebraicznej</b>	
<i>T. Kowalczyk</i> . . . . .	147

<b>Topologia przestrzeni rzeczywistych odwzorowań regularnych</b>	
<i>W. Kucharz</i> . . . . .	148
<b>Pryncypalizacja ideałów szeregów formalnych za pomocą transformacji elementarnych</b>	
<i>K. Kurdyka</i> . . . . .	149
<b>Funkcje klasy <math>C^p</math> w strukturach o-minimalnych</b>	
<i>R. Pierzchała</i> . . . . .	150
<b>O pewnej efektywnej wersji twierdzenia Bertiniego</b>	
<i>T. Rodak, A. Różycki, S. Spodzieja</i> . . . . .	151
<b>Wokół Hipotezy Pullbacku</b>	
<i>K. Zając</i> . . . . .	152
<b>Teoria liczb</b>	<b>153</b>
<b>Rozmaitości semiabelowe i problem badania liniowej zależności punktów</b>	
<i>D. Blinkiewicz</i> . . . . .	154
<b>Twierdzenie Hadamarda o ilorazie dla wielomianów uogólnionych</b>	
<i>J. Byszewski</i> . . . . .	155
<b>O nierówności typu Bessenrodt-Ono dla funkcji <math>A</math>-partycji</b>	
<i>K. Gajdzica</i> . . . . .	156
<b>„Wykładnicza” torsja supereliptycznych Jakobianów</b>	
<i>J. Garnek</i> . . . . .	157
<b>Rozwinięcia typu dwumianowego</b>	
<i>K. Gryszka</i> . . . . .	158
<b>O łańcuchach i cyklach krzywych eliptycznych</b>	
<i>M. Grześkowiak</i> . . . . .	159
<b>Sześciennie równania Pella nad pierścieniami wielomianów i arytmetyka krzywych supereliptycznych</b>	
<i>T. Jędrzejak</i> . . . . .	160
<b>O równaniu diofantycznym <math>\sigma_2(\bar{X}_n) = \sigma_n(\bar{X}_n)</math></b>	
<i>P. Miska</i> . . . . .	161
<b>Wspólne waluacje wielomianów podziału</b>	
<i>B. Naskręcki</i> . . . . .	162

<b>Uniwersalność w krótkich przedziałach</b>	
<i>E. Pańkowski</i> . . . . .	163
<b>Wystąpienia bloków w rozwinięciu binarnym <math>n</math> i <math>n+t</math></b>	
<i>B. Sobolewski</i> . . . . .	164
<b>O równaniu <math>x^3 + y^3 = a^k + b^k</math></b>	
<i>M. Ulas</i> . . . . .	165
<b>O sumie liczb całkowitych dodatnich równej ich iloczynowi (Equal Sum Product Problem)</b>	
<i>M. Zakarczemny</i> . . . . .	166
<b>Uniwersalne formy kwadratowe nad ciałami liczbowymi</b>	
<i>B. Żmija</i> . . . . .	167
<b>Teoria osobliwości - sesja specjalna seminarium GKŁW</b>	<b>169</b>
<b>Germes of Real Surfaces</b>	
<i>L. Birbrair</i> . . . . .	170
<b>Lipschitzowskie twierdzenie o rzędzie</b>	
<i>M. Denkowski</i> . . . . .	171
<b>Metody algebry różniczkowej w teorii systemów dynamicznych</b>	
<i>Z. Hajto</i> . . . . .	172
<b><math>\Lambda_p</math>-regularny rozkład jedności, semialgebraiczna wersja twierdzenia Calderóna-Zygmunda</b>	
<i>B. Kocel-Cynk, W. Pawłucki, A. Valette</i> . . . . .	173
<b><math>\delta</math>-stałe deformacje liniowe osobliwości krzywych</b>	
<i>T. Krasieński, A. Zakrzewska</i> . . . . .	174
<b>Konstrukcja lokalnej krzywej zespolonej o zadanym typie osobliwości</b>	
<i>A. Lenarcik</i> . . . . .	175
<b>Geometria Lipschitzowska rozmaitości z osobliwościami</b>	
<i>M. Michalska</i> . . . . .	176
<b>Klasyfikacja specjalnych 2-flag długości 5 jest skończona</b>	
<i>P. Mormul</i> . . . . .	177
<b>Topologia oswojona w strukturach henselowo minimalnych</b>	
<i>K. J. Nowak</i> . . . . .	178

<b>Defekt nierozkładalnych krzywych płaskich z prostymi osobliwościami</b>	
<i>P. Pokora</i> . . . . .	179
<b>O krotności niewłaściwej</b>	
<i>A. Różycki</i> . . . . .	180
<b>Topologia i teoria mnogości</b>	<b>181</b>
<b>Lipschitzowskie obrazy przestrzeni hiperwypukłych</b>	
<i>J. Bąk</i> . . . . .	182
<b><math>P</math>-przestrzenie jako granice odwrotne</b>	
<i>W. Bielas, A. Kucharski, S. Plewik</i> . . . . .	183
<b>Mała algebra Boole'a z własnością Grothendiecka, ale bez własności Nikodyma</b>	
<i>D. Głodkowski</i> . . . . .	184
<b>Wymiar pokryciowy przestrzeni zwartej a otwartość mnożenia w jej algebrze funkcji ciągłych</b>	
<i>T. Kania</i> . . . . .	185
<b>O własnościach ramsey'owskich nieośrodkowych sfer</b>	
<i>P. Koszmider</i> . . . . .	186
<b>Ultrafiltry oraz przestrzenie topologiczne</b>	
<i>K. Kowitz</i> . . . . .	187
<b>O sumach algebraicznych, drzewach i zbiorach mizernych w przestrzeni Cantora</b>	
<i>M. Michalski</i> . . . . .	188
<b>Łańcuchy w <math>P(\omega)</math> i operatory rozszerzenia</b>	
<i>G. Plebanek</i> . . . . .	189
<b>Przestrzenie funkcyjne na przestrzeniach zwartych <math>\omega</math>-Corsona</b>	
<i>K. Zakrzewski</i> . . . . .	190
<b>O sumach algebraicznych, drzewach i zbiorach miary zero w przestrzeni Cantora</b>	
<i>S. Żeberski</i> . . . . .	191
<b>Sesja ogólna, poświęcona innym zagadnieniom matematycznym</b>	<b>193</b>
<b>Wokół rozwiązań ciągłych liniowego równania funkcyjnego ze słabo zwężającą funkcją o wartościach losowych</b>	
<i>K. Baron</i> . . . . .	194

<b>Monotoniczna wersja twierdzenia Avramescu</b>	
<i>M. Beldziński</i> . . . . .	195
<b>Zastosowanie zasady Ważewskiego w problemie charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa</b>	
<i>M. Bieniek</i> . . . . .	196
<b>Problem stabilności dla grafów cyrkulantnych o bezkwadratowej liczbie wierzchołków</b>	
<i>B. Bychawski</i> . . . . .	197
<b>Zastosowania algebry binarnej do wybranych zagadnień w elektronice oraz matematyce</b>	
<i>P. Chłosta</i> . . . . .	198
<b>Centralne twierdzenie graniczne dla wykładniczo ergodycznych w normie Fortet–Mouriera procesów Markowa</b>	
<i>D. Czapła</i> . . . . .	199
<b>Klamry Hopfa, wiązary Hopfa, sterty Hopfa</b>	
<i>M. Hryniewicka</i> . . . . .	201
<b>Wzrost gospodarczy a zachowanie kapitału naturalnego – model dynamiczny</b>	
<i>M. Kornafel</i> . . . . .	202
<b>O pierścieniach z amalgamacją</b>	
<i>M. Nowakowska</i> . . . . .	203
<b>Przetasowane kwadraty</b>	
<i>B. Pawlik</i> . . . . .	204
<b>Dualności w topologii ujarzmionej</b>	
<i>A. Piękosz</i> . . . . .	205
<b>O pewnych aspektach teorii de Rham-Hodge’a oraz całkowalnych wielo-wymiarowych układach różniczkowych na rozmaitościach Riemanna</b>	
<i>A. K. Prykarpatski, R. A. Kycia</i> . . . . .	207
<b>Grupy, grafy i grupoidy</b>	
<i>A. Sliżewska</i> . . . . .	210
<b>Nieredukowalne rodziny podgrup maksymalnych w grupach skończonych</b>	
<i>A. Stocka</i> . . . . .	211
<b>Porządki stochastyczne a nierówności funkcyjne</b>	
<i>T. Szostok</i> . . . . .	212



**Kiedy asymptotycznie stabilna półgrupa Markowa ma e-własność?**

*R. Kukulski, H. Wojewódka-Ściążko* . . . . . 213



# Wstęp

Drogie Koleżanki, Drodzy Koledzy!

Witamy Was w Katowicach, gdzie mamy zaszczyt organizować 9. Forum Matematyków Polskich. Zaszczyc ten został nam powierzony przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Akurat w roku 2024 Katowice są Europejskim Miastem Nauki, a matematyka jest jedną z wielu dziedzin promowanych w ciągu 50 tygodni w Mieście Nauki: tygodni poświęconych nauce, sztuce i różnym przejawom życia społecznego w metropolii śląsko-zagłębiowskiej.

Jesteśmy dumni mogąc podjąć znakomitych gości w tym niezwykłym czasie. Organizacja konferencji trwała od ponad dziewięciu miesięcy; najpierw Komitet Naukowy zaprosił prelegentów plenarnych, których będziemy mogli usłyszeć w gościnnej Auli im. Pawlikowskiego w siedzibie Wydziału Humanistycznego UŚl, przy ul. Uniwersyteckiej 4. Potem do pracy przystąpił Komitet Organizacyjny, który wciąż pracuje, by Forum zakończyło się pomyślnie.

Oprócz zaproszonych wykładowców, wykłady plenarne wygłoszą laureaci Nagród Głównych PTM-u: Stefana Banacha i Hugona Steinhausa, Nagród PTM dla Młodych Matematyków, Międzynarodowych Nagród im. Stefana Banacha (za najlepsze rozprawy doktorskie w dyscyplinie matematyka), a także zaproszeni prelegenci w ramach sesji *Matematyczne zagadnienia we współczesnej analizie danych* i *Otwartej sesji dydaktycznej*. Przewidujemy również dwa odczyty specjalne pt. *Stanisław Łojasiewicz i kariera jego nierówności w matematyce* oraz *Intuicja i metoda – matematyczne inspiracje w sztuce*.

Pozostałe odczyty będą się odbywać w sesjach specjalnych, przyjęto, że prelegent będzie miał 25 minut czasu, po odczycie odbędzie się 5 min. dyskusja.

W dalszym ciągu zamieszczamy streszczenia referatów.

Przygotowaliśmy też program socjalny, zresztą Katowice, które obchodzą akurat 169. rocznicę uzyskania praw miejskich, będą Państwa kusić wieloma atrakcjami. Mamy tylko nadzieję, że te atrakcje nie odciągną od zasadniczego celu naszego spotkania.

Życzymy miłego pobytu i pozytywnych wrażeń,

Katowice, 9 września 2024

Michał Baczyński (Przewodniczący Komitetu Organizacyjnego 9. FMP)

Jacek Mięgisz (Prezes PTM)

Maciej Sablik (Przewodniczący Komitetu Naukowego 9. FMP)



# Organizatorzy

## Komitety naukowy

Leokadia Białas-Cieź (UJ)  
Krzysztof Dębicki (UWr)  
Tomasz Downarowicz (PWr)  
Wojciech Gajda (UAM)  
Wacław Marzantowicz (UAM)  
Marian Mrozek (UJ)

Ryszard Pawlak (UŁ)  
Michał Pilipczuk (UW)  
Ryszard Rudnicki (IM PAN)  
Maciej Sablik (UŚ) - przewodniczący  
Agnieszka Świerczewska-Gwiazda (UW)

## Komitety organizacyjny

Michał Baczyński - przewodniczący  
Leokadia Białas-Cieź  
Dawid Czapla  
Maciej Czarnecki  
Łukasz Dawidowski  
Waldemar Hołubowski  
Katarzyna Horbacz  
Piotr Kowalczyk

Adrian Łydka  
Katarzyna Miś  
Ryszard Rudnicki  
Maciej Sablik  
Elżbieta Sadowska - Owczorz  
Dariusz Sokołowski  
Renata Suchanek

## Organizatorzy sesji

Adam Białożyty (UJ)  
Marcin Bilski (UJ)  
Aleksander Błaszczuk (UŚ)  
Małgorzata Bogdan (UWr)  
Natalia Cieślak (UŚ)  
Edyta Juskowiak (UAM)  
Maciej Denkowski (UJ)  
Christophe Eyral (IM PAN)  
Tomasz Kania (UJ)  
Tadeusz Krasiński (UŁ)  
Wiesław Kubiś (UKSW)  
Andrzej Kucharski (UŚ)  
Wojciech Kucharz (UJ)  
Tadeusz Kulczycki (PWr)

Aleksandra Nowel (UG)  
Łukasz Pańkowski (UAM)  
Krzysztof Pawałowski (UAM)  
Rafał Pierzchała (UJ)  
Szymon Plewik (UŚ)  
Józef Przytycki (UGW)  
Ryszard Rudnicki (IM PAN)  
Mirosława Sajka (UKEN)  
Maciej Ulas (UJ)  
Anna Valette (UJ)  
Radosław Wieczorek (UŚ)  
Robert Wolak (UJ)  
Aneta Wróblewska-Kamińska (IM PAN)



# Laureaci nagród PTM

PROF. DR HAB MARIUSZ MIREK (UWR)

Laureat Nagrody Głównej PTM im. Stefana Banacha

PROF. DR HAB. MARIAN MROZEK (UJ)

Laureat Nagrody Głównej PTM im. Hugona Steinhausa

MGR DAMIAN GŁODKOWSKI (UW)

Laureat Nagrody PTM dla młodych matematyków za osiągnięcia badawcze

MGR MACIEJ KUCHARSKI (UWR)

Laureat Nagrody PTM dla młodych matematyków za osiągnięcia badawcze

O ZWIĄZKACH KOMBINATORYKI ADDYTYWNEJ Z TEORIĄ ERGODYCZNĄ  
I ANALIZĄ FOURIERA

**Mariusz Mirek**

Rutgers University

e-mail: [mariusz.mirek@rutgers.edu](mailto:mariusz.mirek@rutgers.edu)

Twierdzenie Szemerédiego orzeka, że każdy podzbiór zbioru liczb naturalnych o nieznikającej górnej gęstości zawiera dowolnie długie postępy arytmetyczne. Celem wykładu będzie pokazanie związków tego twierdzenia z teorią ergodyczną i analizą Fouriera. Następnie pokażemy jak twierdzenie Szemerédiego doprowadziło do sformułowania hipotezy Furstenberga–Bergelsona–Leibmana, która jest obecnie jednym z centralnych problemów w punktowej teorii ergodycznej.

[1] J. Bourgain, M. Mirek, E. M. Stein, J. Wright, On a multi-parameter variant of the Bellow–Furstenberg problem, *Forum of Mathematics, Pi*, **11** (2023), e23.

[2] A. D. Ionescu, Á. Magyar, M. Mirek, T. Z. Szarek, Polynomial averages and pointwise ergodic theorems on nilpotent groups, *Inventiones Mathematicae*, **231** (2023), 1023–1140.

[3] B. Krause, M. Mirek, T. Tao, Pointwise ergodic theorems for non-conventional bilinear polynomial averages, *Annals of Mathematics*, **195** (2022), no. 3, 997–1109.



HOMOLOGIE PERSYSTENTNE PRZEZ PRYZMAT KOMBINATORYCZNEJ  
DYNAMIKI TOPOLOGICZNEJ**Marian Mrozek**

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: marian.mrozek@uj.edu.pl

Podstawowym narzędziem współczesnej topologicznej analizy danych (TDA, [1]) są homologie persystentne oparte o algebraiczne twierdzenie o rozkładzie [2]. Jednak oryginalne podejście do homologii persystentnych [3] ma bardziej geometryczny posmak. Opiera się ono o parowanie typu birth-death komórek kompleksu sympleksyjnego uporządkowanych w ciąg zwany filtrem. Filtr ten można interpretować jako funkcję Morse'a indukującą kombinatoryczny układ dynamiczny w sensie Formana [5]. W układzie tym zaszyte są wszystkie pary birth-death. Można je wychwycić poprzez sekwencję uproszczeń lub wygładzeń układu, uzyskiwanych poprzez ciąg redukcji wyróżnionych par birth-death zwanych parami płytkimi. W ujęciu dynamicznym te płytke pary birth-death to sąsiadujące komórki krytyczne powiązane połączeniem heteroklinicznym. Pierwotnie nie wszystkie pary birth-death muszą być płytke. Kolejne pary birth-death pojawiają się w następstwie redukcji. Prowadzi to do struktury posetu w zbiorze par birth-death. Indukowany układ dynamiczny wraz z tym posetem wzmacnia diagram persystencji jako narzędzie topologicznej analizy danych co daje lepszy wgląd w geometrię chmur danych.

Na podstawie projektu realizowanego z Herbertem Edelsbrunnerem [4]. We współpracy z Michałem Lipińskim i Manuelem Soriano Triguerosem.

[1] G. Carlsson, Topology and data, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2009, 255–308

[2] G. Carlsson, Afra Zomorodian, Computing persistent homology, *Discrete Comput. Geom.*, 2005, 255–308

[3] H. Edelsbrunner, D. Letscher and A. Zomorodian, Topological persistence and simplification, *Discrete Comput. Geom.*, 2002, 249–274

[4] H. Edelsbrunner and M. Mrozek, The Depth Poset of a Filtered Lefschetz Complex, *preprint*, arXiv:2311.14364

[5] R. Forman, Morse theory for cell complexes, *Adv. Math.*, 1998, 90–145

## CO CIĄGŁE FUNKCJE WIEDZĄ O SWOJEJ DZIEDZINIE?

**Damian Głodkowski**

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: dglodkowski@impan.pl

Przedmiotem wykładu jest problem klasyfikacji przestrzeni Banacha postaci  $C(K)$  składających się z rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na przestrzeniach zwartych z normą supremum. Klasyczne twierdzenie Banacha-Stone'a mówi, że mając pełną wiedzę na temat struktury metrycznej  $C(K)$ , jesteśmy w stanie zrekonstruować  $K$  z dokładnością do homeomorfizmu. Sytuacja zmienia się, jeśli do dyspozycji mamy jedynie strukturę liniowo-topologiczną  $C(K)$  (równoważnie: mamy jedynie informacje na temat pewnej przestrzeni Banacha izomorficznej z  $C(K)$ ), np. nie możemy odróżnić przestrzeni funkcji ciągłych na zbiorze Cantora od przestrzeni funkcji na odcinku.

Na wykładzie przedstawię aktualny stan wiedzy na temat izomorfizmów pomiędzy przestrzeniami funkcji ciągłych oraz omówię metody pozwalające stwierdzić, że nie istnieje izomorfizm pomiędzy pewnymi takimi przestrzeniami. W szczególności, postaram się przybliżyć przykład przestrzeni zwartej  $K$  (skonstruowanej w pracy [1]) o dowolnie zadanym wymiarze topologicznym, która ma następującą własność: jeśli  $L$  jest przestrzenią zwartą taką, że  $C(L)$  jest izomorficzne z  $C(K)$ , to wymiar  $L$  jest równy wymiarowi  $K$ .

[1] D. Głodkowski, A Banach space  $C(K)$  reading the dimension of  $K$ , *J. Funct. Anal.*, 285 (2023), no. 4, Paper No. 109986

NIEZALEŻNE OD WYMIARU OSZACOWANIA NORM TRANSFORMAT  
RIESZA

**Maciej Kucharski**

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: maciej.kucharski@math.uni.wroc.pl

Niech  $P$  będzie jednorodnym harmonicznym wielomianem stopnia  $k$  określonym na  $\mathbb{R}^d$ . Transformatę Riesz rzędu  $k$  związaną z  $P$  definiujemy wzorem

$$R_P f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} R_P^t f(x), \quad \text{gdzie} \quad R_P^t f(x) = \gamma_k \int_{|y|>t} \frac{P(y)}{|y|^{d+k}} f(x-y) dy,$$

a maksymalną transformatę Riesz definiujemy jako

$$R_P^* f(x) = \sup_{t>0} |R_P^t f(x)|.$$

Główne twierdzenie, które przedstawię w referacie, dotyczy oszacowania maksymalnej transformaty Riesz przez zwykłą transformatę ze stałą niezależną od wymiaru  $d$ .

**Twierdzenie.** *Ustalmy  $p \in (1, \infty)$  i niech  $k \leq d$  będzie dodatnią liczbą całkowitą. Niech  $P$  będzie jednorodnym harmonicznym wielomianem stopnia  $k$ . Wtedy istnieje stała  $B(p, k)$  niezależna od wymiaru  $d$  taka że*

$$\|R_P^* f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq B(p, k) \|R_P f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

dla  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ .

Dowód składa się z czterech części. Po pierwsze przedstawiamy obcięta transformatę Riesz  $R_P^t$  w postaci  $R_P^t = M_k^t(R_P)$  dla pewnej rodziny operatorów  $M_k^t$ ,  $t > 0$ . Następnie wyrażamy operatory  $M_k^t$  używając transformat Riesz  $R_P$  i obciętych transformat Riesz  $R_P^t$ . W trzecim kroku rozszerzamy transformaty do  $\mathbb{C}^d$  i stosujemy zespoloną metodę obrotów Iwańca i Martina, która pozwala przedstawić transformatę Riesz jako całkę po sferze z zespolonej kierunkowej transformaty Hilberta i dostać niezależne od wymiaru oszacowania jej normy. Na końcu ograniczamy zespoloną transformatę Riesz do transformaty rzeczywistej z zachowaniem oszacowań jej normy.

Referat jest oparty na pracy [1].

[1] M. Kucharski, B. Wróbel, J. Zienkiewicz, Dimension-free  $L^p$  estimates for higher order maximal Riesz transforms in terms of the Riesz transforms, *preprint*, arXiv:2305.09279



# Laureaci Międzynarodowej Nagrody im. Stefana Banacha

DR DALIMIL PEŠA (UNIWERSYTET KAROLA, PRAGA)  
nagroda główna

DR KAROL DUDA (UWR)  
wyróżnienie

REARRANGEMENT-INVARIANT QUASI-BANACH FUNCTION SPACES AND  
THEIR AMALGAMS

Dalimil Peša

Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik, Chemnitz, Germany  
and

Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Praha, Czech Republic  
e-mail: pesa.dalimil@gmail.com

Abstract classes of function spaces have historically proven extremely useful by providing the necessary frameworks for such fields as operator theory, harmonic analysis or interpolation. Among the many examples, the classes of rearrangement-invariant (r.i.) spaces have always played an important role. However, the existing, well developed theories cover only the normed spaces, leaving many important examples untreated.

In this talk, we present some recent results of our effort to fill this gap. Our focus is on the class of r.i. quasi-Banach function spaces, a natural axiomatisation of Lebesgue spaces that, unlike other approaches, covers also the quasinormed cases, as well as many other important function spaces (with the space  $L^{1,\infty}$ , also called weak- $L^1$ , being the most significant example). Furthermore, as one of the tools that has proven very useful in studying this class, we introduce the so-called Wiener–Luxemburg amalgam spaces, an abstract framework for constructing rearrangement-invariant amalgams, that is, spaces where the conditions on the local and global behaviour can be prescribed separately.

The talk is based on the first part of the author’s dissertation, expanded by some more recent results.

[1] A. Nekvinda and D. Peša, On the Properties of Quasi-Banach Function Spaces, *The Journal of Geometric Analysis*, 2024, 34(8)

[2] D. Peša, Wiener-Luxemburg amalgam spaces, *J. Funct. Anal.*, 2022, 282(1)

[3] A. Musilová, A. Nekvinda, D. Peša, and H. Turčinová, On the properties of rearrangement-invariant quasi-Banach function spaces., *preprint*, ArXiv:2404.00707

## PODGRUPY TORSYJNE GRUP MAŁYCH SKREŚLEŃ

Karol Duda

IMPAN

e-mail: kduda@impan.pl

Podczas referatu przedstawię podstawy teorii małych skreśleń, klasycznego narzędzia służącego do konstrukcji grup o interesujących własnościach. Następnie omówię rezultaty dotyczące wciąż otwartego problemu dotyczącego istnienia globalnych punktów stałych dla lokalnie eliptycznych działań grup na kompleksach małych skreśleń. Z zastosowania tych rezultatów wynika, że podgrupy torsyjne grup o prezentacjach  $C(6)$ ,  $C(4)–T(4)$  lub  $C(3)–T(6)$  małych skreśleń są skończone.

[1] K. Duda, Torsion subgroups of small cancellation groups, *preprint*, ArXiv:2112.01912





# Wykłady plenarne

## ALGEBRICZNA GRUPA SATO-TATE’A I HIPOTEZA SATO-TATE’A

Grzegorz Banaszak

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza

e-mail: banaszak@amu.edu.pl

W połowie lat 1960-tych M. Sato i J. Tate sformułowali hipotezę (hipoteza Sato-Tate’a) dla krzywych eliptycznych  $E$  bez CM nad ciałami liczbowymi  $K$ , dotyczącą równomiernego rozmieszczenia znormalizowanych wartości własnych automorfizmów Frobeniusa działających na wymiernych modułach Tate’a  $V_l(E)$ . Ta hipoteza została udowodniona w 2008r. przez R. Taylora, L. Clozela, M. Harisa, N. Shephard-Barrona [5]-[7], nad ciałami totalnie rzeczywistymi  $K$  przy pewnym dodatkowym założeniu. Niedawno hipoteza ta została udowodniona dla krzywych eliptycznych nad ciałami totalnie zespolonymi (CM fields) w pracy [1].

Powstaje naturalne pytanie czy ta hipoteza może być rozszerzona na abelowe rozmaitości i ogólniej na motywy. Na początku lat 90-tych J.-P. Serre zaproponował uogólnienie tej hipotezy dla motywów względem numerycznej równoważności poprzez konstrukcję grupy Sato-Tate’a. Niech  $A$  będzie rozmaitością abelową nad  $K$ . Dla właściwego sformułowania hipotezy Sato-Tate’a dotyczącego równomiernego rozmieszczenia elementów Frobeniusa w reprezentacji absolutnej grupy Galois  $G_K$  na wymiernym module Tate’a  $V_l(A)$ , definiujemy algebraiczną grupę Sato-Tate’a  $AST_K(A)$  [2] - [4]. Na podstawie idei J-P. Serre, grupę Sato-Tate’a  $ST_K(A)$  dla  $A$  definiuje się jako maksymalną zwartą podgrupę grupy  $AST_K(A)(\mathbb{C})$ .

Podczas wykładu omówię wyniki trzech prac [2]-[4] dotyczących obliczeń algebraicznych grup Sato-Tate’a  $AST_K(A)$  i odpowiadających im grup Sato-Tate’a  $ST_K(A)$  dla rozmaitości abelowych i ogólniej motywów. Dla prostoty prezentacji ograniczę się głównie do omówienia hipotezy Sato-Tate’a dla rozmaitości abelowych. Pokrótkie objaśnię jak te rezultaty można uogólnić na motywy. Przedstawię konstrukcję grupy  $AST_K(A)$  na bazie motywiczej kategorii absolutnych cykli Hodge’a zdefiniowanej przez P. Deligne’a i motywiczej kategorii umotywowanych cykli Y. André. Omówię arytmetyczne własności grupy  $AST_K(A)$  oraz jawną postać  $AST_K(A)$  dla pewnych rodzin abelowych rozmaitości. Powyższe wyniki są uzyskane wspólnie Kiranem Kedlayą.

- [1] P.B. Allen, F. Calegari, A. Caraiani, T. Gee, D. Helm, B.V. Le Hung, J. Newton, P. Scholze, R. Taylor, and J.A. Thorne, Potential automorphy over CM fields, *Annals of Mathematics*, 2023, 197(3), 897–1113
- [2] G. Banaszak, K. Kedlaya, An algebraic Sato–Tate group and Sato–Tate conjecture, *Indiana Univ. Math. Journal*, 2015, 64, 245–274
- [3] G. Banaszak, K. Kedlaya, Motivic Serre group, algebraic Sato–Tate group and Sato–Tate conjecture, *Frobenius Distributions: Lang-Trotter and Sato–Tate Conjectures*, *AMS Contemporary Math.*, 2016, 663, 11–44
- [4] G. Banaszak, K. Kedlaya, Motivic Serre group and Sato–Tate conjecture, *preprint*, ArXiv:2302.13016 [math.NT]
- [5] L. Clozel, M. Harris, R. Taylor, Automorphy for some  $l$ -adic lifts of automorphic mod  $l$  Galois representations, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 2008, 108, 1–181
- [6] R. Taylor, Automorphy for some  $l$ -adic lifts of automorphic mod  $l$  Galois representations. II, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 2008, 108, 183–239
- [7] M. Harris, N. Shephard-Barron, R. Taylor, A family of Calabi–Yau varieties and potential automorphy, *Annals of Mathematics*, 2010, 171 (2), 779–813

MATEMATYKA KSZTAŁTU: KRÓTKI WSTĘP DO TOPOLOGICZNEJ  
ANALIZY DANYCH

**Paweł Dłotko**

Centrum Dioscuri w Topologicznej Analizie Danych

e-mail: [pdlotko@gmail.com](mailto:pdlotko@gmail.com)

Mój referat nakreśli podstawowe metody topologicznej analizy danych. Przedyskutuję w nim podstawy matematyczne tej dyscypliny, a następnie pokażę, jak przekładają się one na efektywne algorytmy i konkretne wyniki w różnych dziedzinach nauki i techniki. W szczególności pokażę, jak rozwijane przez nas metody pozwalają uzyskać nowe typy statystyk danych (diagramy persystencji, krzywe i profile Eulera) oraz jak inspirowane topologią algorytmy (mapper, ballMapper, clusterGraph) pozwalają nam zwizualizować skończone, acz bardzo wysoko wymiarowe dane. Wyniki przedstawione w referacie są opisane w publikacjach pracowników Centrum Dioscuri w Topologicznej Analizie Danych, które można znaleźć na naszej stronie <https://dioscuri-tda.org/publications.html>. Przystępne wprowadzenie do tematyki można znaleźć w artykułach [1] i [2].

[1] P. Dłotko, Obrazy funkcji w praktyce, *ACADEMIA. Magazyn Polskiej Akademii Nauk*, No 4 (72) Obrazy, [http://journals.pan.pl/Content/125751/PDF/66-69\\_Dlotko\\_pol.pdf](http://journals.pan.pl/Content/125751/PDF/66-69_Dlotko_pol.pdf)

[2] P. Dłotko, On the shape that matters – topology and geometry in data science, *EMS MAG132PP. 5-13*, <https://euromathsoc.org/magazine/articles/190>

## GEOMETRIA PRZESTRZENI LOKALNIE SYMETRYCZNYCH

**Mikołaj Fraczyk**

Centrum Zaawansowanych Badań Matematycznych, Uniwersytet Jagielloński

e-mail: [mikolaj.fraczyk@uj.edu.pl](mailto:mikolaj.fraczyk@uj.edu.pl)

Dzięki wynikom Thurstona i jego szkoły rozumiemy dość dobrze świat 3-wymiarowych rozmaitości hiperbolicznych, nawet bez założenia zwartości czy skończonej objętości. Obecnie wiele wysiłków wkładanych jest w rozszerzenie tej teorii na niezwarłe przestrzenie lokalnie symetryczne „wyższej rangi” (higher rank), gdzie wciąż wiemy bardzo niewiele. Opowiem o kilku niedawnych wynikach które ilustrują jak bardzo różni się teoria w przypadku hiperbolicznym i wyższej rangi. Referat oparty będzie na pracach napisanych wspólnie z T. Gelander, M. Lee i B. Lowe.

## PEWNE WYNIKI DOTYCZĄCE ARYTMETYKI CIAŁ FUNKCYJNYCH

Piotr Krasoń

Uniwersytet Szczeciński

e-mail: piotr.krason@usz.edu.pl

Niech  $A = \mathbb{F}_q[t]$  będzie pierścieniem wielomianów nad ciałem skończonym  $\mathbb{F}_q$  o  $q$  elementach i niech  $k = \mathbb{F}_q(t)$  będzie ciałem ułamków pierścienia  $A$ . Niech  $v_\infty : k \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$  będzie znormalizowaną waluacją stowarzyszoną z  $\frac{1}{t}$  (i.e.  $v_\infty(\frac{1}{t}) = 1$ ). Niech  $K$  będzie uzupełnieniem  $k$  ze względu na  $v_\infty$  i  $\bar{K}$  ustalonym domknięciem algebraicznym  $K$ . Przez  $\mathbb{C}_\infty$  oznaczamy będziemy uzupełnienie  $\bar{K}$  ze względu na rozszerzenie  $\bar{v}_\infty$  waluacji  $v_\infty$ . W latach 30-tych ubiegłego wieku L. Carlitz zdefiniował funkcję eksponencjalną  $e_C : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  spełniającą równanie funkcyjne  $e_C(az) = C_a(e_C(z))$  gdzie  $a \in \mathbb{F}_q[t]$  i  $C_a$  jest addytywnym wielomianem. Spełnione są relacje  $C_{ab}(z) = C_a(C_b(z))$ ,  $C_a(z_1 + z_2) = C_a(z_1) + C_a(z_2)$ . Odpowiedniość  $a \rightarrow C_a$  nazywa się modułem Carlitza. Wartości  $e_C(z)$  takie, że  $e_C(nz) = 1$  generują abelowe rozszerzenia  $k$  podobne do rozszerzeń cyklotomicznych ciała  $\mathbb{Q}$ . V.G. Drinfeld uogólnił teorię exponentów Carlitza (rangi 1) do dowolnej rangi  $d$ . Uogólnienie to nazywa się dzisiaj modułami Drinfelda. Warto dodać, że przestrzenie moduli pewnych uogólnień modułów Drinfelda (shtuka) odegrały kluczową rolę w dowodzie L. Lafforgue'a hipotezy Langlandsa dla ciał funkcyjnych. Dodatkowo moduły Drinfelda pozwoliły D. Hayesowi zbudować teorię ciał klas dla ciał funkcyjnych. Moduły Drinfelda i ich uogólnienie  $\mathfrak{t}$ -moduły stanowią obiekt intensywnych badań (patrz [2]).

W pracy [3] wspólnie z D. Kędzierskim badamy strukturę grupy rozszerzeń  $\text{Ext}_\tau^1(\phi, \psi)$  w przypadku gdy  $\psi, \phi$  są modułami Drinfelda lub pewnymi klasami  $\mathfrak{t}$ -modułów. Główną ideą przy opisie przestrzeni rozszerzeń jest ich opis przez biderywacje tj. w języku algebry liniowej.

Język biderywacji został wprowadzony w tezie Hochschilda przy badaniu (pierwszej grupy kohomologii Hochschilda) łącznych algebr. w latach 1970-tych C.M. Ringel zastosował tę ideę do przypadku rozszerzeń modułów nad algebrą dróg kołczanu i bardziej ogólnie dla tzw. "K-species". W 2003 M. A. Papanikolas i N. Ramachandran wprowadzili pojęcie biderywacji dla  $\mathfrak{t}$ -modułów i zastosowali je do dowodu formuły Weila-Barsottiego dla modułów Drinfelda.

Omówimy nasz rezultat mówiący, że jeżeli  $\phi$  i  $\psi$  są modułami Drinfelda spełniającymi warunek dla rang  $\mathbf{rk}\phi > \mathbf{rk}\psi$  to  $\text{Ext}_\tau^1(\phi, \psi)$  ma strukturę  $\mathfrak{t}$ -modułu. Podamy kompletny algorytm opisujący tę strukturę. Następnie uogólnimy ten rezultat na przypadek gdy  $\phi$  jest tzw. czystym  $\mathfrak{t}$ -modułem a  $\psi$  jest modułem Drinfelda lub potęgą tensorową modułu Carlitza.

Przedstawimy dualność pomiędzy grupami  $\text{Ext}$  dla  $\mathfrak{t}$ -modułów i odpowiadających im stowarzyszonych  $\mathfrak{t}^\sigma$ -modułów. Udowodnimy istnienie sześćo-składnikowego ciągu dokładnego  $\text{Hom} - \text{Ext}$  dla  $\mathfrak{t}$ -modułów i dualnych  $\mathfrak{t}$ -motywów. Jako, że kategorie  $\mathfrak{t}$ -modułów i dualnych  $\mathfrak{t}$ -motywów są tylko addytywne (nie są abelowe) te rezultaty są nietrywialne i nieco zaskakujące. Opiszemy również strukturę grupy  $\text{Ext}_\tau^1(\Phi, \Psi)$  gdy  $\Phi$  i  $\Psi$  posiadają ciąg kompozycyjny którego ilorazy są modułami Drinfelda. Podamy przykłady komputerowych obliczeń  $\mathfrak{t}$ -struktur na grupach  $\text{Ext}$ .

W dalszej części omówię rezultaty uzyskane przeze mnie w [4] dotyczące odwzorowania redukcji w kategorii  $\mathfrak{t}$ -modułów. W pracy [1] wspólnie z G. Banaszakiem uzyskaliśmy interesujący warunek numeryczny opisujący kiedy zachodzi zasada lokalno-globalna dla rozmaitości abelowych. W [4] udowodniony został analogiczny rezultat dla  $\mathfrak{t}$ -modułów:

Niech  $\hat{\varphi} = \phi_1^{e_1} \times \cdots \times \phi_t^{e_t}$  będzie  $\mathbf{t}$ -modułem gdzie  $\phi_i$  dla  $1 \leq i \leq t$  są parami nieizogemicznymi modułami Drinfelda charakterystyki zero zdefiniowanymi nad  $\mathcal{O}_K$ . Zakładamy, że dla każdego  $1 \leq i \leq t$ ,  $N_i \subset \phi_i(\mathcal{O}_K)$  jest skończenie generowanym  $A$ -podmodułem grupy Mordell-Weila. Niech  $\Lambda \subset N = N_1^{e_1} \times \cdots \times N_t^{e_t}$  będzie  $A$ -podmodułem. Załóżmy, że  $d_i = \mathbf{rk}(\phi_i) \geq e_i$  dla każdego  $1 \leq i \leq t$ . Niech  $P \in N$  i załóżmy, że dla prawie wszystkich niearchimedesowych miejsc  $\mathcal{P}$  pierścienia  $\mathcal{O}_K$  zachodzi  $\text{red}_{\mathcal{P}}(P) \in \text{red}_{\mathcal{P}}(\Lambda)$ . Wtedy  $P \in \Lambda + N_{\text{tor}}$ . Warto zauważyć, że powyższy rezultat nie jest prostą analogią odpowiedniego rezultatu z [1] ponieważ kategoria  $\mathbf{t}$ -modułów nie jest półprosta.

- [1] G. Banaszak, P. Krasoń, On arithmetic in Mordell-Weil groups, *Acta Arithmetica*, 2011, 150, 315–337
- [2] W.D. Brownawell, M. Papanikolas, A rapid introduction to Drinfeld modules,  $\mathbf{t}$ -modules, and  $\mathbf{t}$ -motives, in: *t-Motives: Hodge Structures, Transcendence, and Other Motivic Aspects*, European Mathematical Society, Zürich 2020, 3–30
- [3] D.E. Kędzierski, P. Krasoń, On  $\text{Ext}^1$  for Drinfeld modules, *Journal of Number Theory*, 2024, 256, 97–135
- [4] P. Krasoń, Some remarks on reduction map for Drinfeld modules, *Acta Arithmetica*, 2023, 210, 175–190

OPowieści o INTELIGENCJI  
NATURALNEJ I SZTUCZNEJ

**Jacek Tabor**

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: [jacek.tabor@uj.edu.pl](mailto:jacek.tabor@uj.edu.pl)

W referacie postaram przybliżyć w jaki sposób rozwijały się sieci neuronowe i jakie zadania starają się rozwiązywać. W ramach motywacji zacznę od opisanie powstawania układu nerwowego u zwierząt, a następnie przejdę do budowy sztucznych sieci neuronowych. W ostatniej części referatu opowiem w szczególności o jednym z najważniejszych obecnie modeli do generowania obrazów – tak zwanych modelach dyfuzyjnych. Są to modele oparte bardzo mocno na procesach stochastycznych.

Referat będzie korzystał częściowo z [1].

[1] J. Tabor & al., *Głębokie Uczenie: Wprowadzenie*, Gliwice: Helion, 2022

## PÓLGRUPY OPERATORÓW. STOSOWAĆ CZY NIE STOSOWAĆ?

**Marta Tyran-Kamińska**

Uniwersytet Śląski w Katowicach

e-mail: marta.tyran-kaminska@us.edu.pl

Budowa modeli matematycznych w naukach przyrodniczych często prowadzi do równań opisujących zmianę w czasie badanej populacji obiektów. Takie równania mogą być różnej postaci, np. gdy czas jest dyskretny są to równania różnicowe, a gdy czas zmienia się w sposób ciągły otrzymujemy różnego rodzaju równania różniczkowe [1]. Szczególne znaczenie mają równania opisujące ewolucję gęstości rozkładów kawałkami deterministycznych procesów Markowa [2], procesów dyfuzji ze skokami lub ogólniej procesów hybrydowych [3]. Równania te rozpatrujemy na przestrzeniach funkcji całkowalnych  $L^1$  i możemy je zapisać w ogólnej postaci [4,5]

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t), \quad \Psi_0 u(t) = \Psi u(t), \quad t > 0, \quad u(0) = f,$$

gdzie  $A$  jest na ogół operatorem różniczkowym,  $B$  opisuje zmiany w przestrzeni, natomiast  $\Psi_0$  oraz  $\Psi$  – warunki brzegowe. Omówimy wykorzystanie półgrup operatorów do badania istnienia i jednoznaczności rozwiązań takich równań, a także ich asymptotyki. Podamy przykłady zastosowań.

- [1] A. Lasota, M.C. Mackey, Chaos, Fractals, and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics, *Springer-Verlag*, 1994
- [2] R. Rudnicki, M. Tyran-Kamińska, Piecewise Deterministic Processes in Biological Models, *Springer*, 2017
- [3] K. Pichór, R. Rudnicki, Transformation semigroups and their applications, *preprint*, ArXiv:2402.01572
- [4] P. Gwizdź, M. Tyran-Kamińska, Positive semigroups and perturbations of boundary conditions, *Positivity*, 2019, 23, 921–939
- [5] M. Tyran-Kamińska, Transport equations and perturbations of boundary conditions, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2020, 43, 10511–10531



## KOLOROWANIE GRAFÓW BEZ DUŻYCH KLIK

**Bartosz Walczak**

Instytut Informatyki Analitycznej, Uniwersytet Jagielloński

e-mail: bartosz.walczak@uj.edu.pl

Kolorowania są jednym z centralnych przedmiotów badań teorii grafów. Do poprawnego pokolorowania grafu, czyli takiego, w którym sąsiadujące ze sobą wierzchołki otrzymują różne kolory, potrzeba co najmniej tylu kolorów, ile wierzchołków ma największa klika, a czasami znacznie więcej — istnieją grafy, które wymagają dowolnie wielu kolorów, mimo że nie mają klik o trzech wierzchołkach. Z drugiej strony w wielu naturalnych klasach grafów liczba potrzebnych kolorów jest ograniczona przez pewną funkcję rozmiaru najliczniejszej kliky — takie klasy grafów nazywamy  $\chi$ -ograniczonymi. Celem wykładu jest wprowadzenie słuchacza do tematyki  $\chi$ -ograniczonych klas grafów ze szczególnym uwzględnieniem najważniejszych osiągnięć ostatniej dekady oraz bieżących wyzwań.

## ANALIZA MODELI HYDRODYNAMICZNYCH ZACHOWAŃ KOLEKTYWNYCH

**Ewelina Zatorska**

Mathematics Institute, University of Warwick, UK

e-mail: ewelina.zatorska@warwick.ac.uk

Modele hydrodynamiczne zachowań kolektywnych opisują, w sposób makroskopowy, oddziaływania między cząstkami, zwanymi także osobnikami czy agentami. Są to układy równań różniczkowych cząstkowych wyrażające prawa zachowania masy i momentu pędu dla kontinuum oddziałujących jednostek. To co odróżnia je od klasycznych równań mechaniki płynów to bilans sił uwzględniający, często nielokalne lub niesymetryczne, oddziaływania. Wyjaśnię na czym polegają te różnice, oraz jaki jest ich wpływ na teorię istnienia słabych i miarowych rozwiązań.

Naszym punktem wyjścia będzie jedno-wymiarowy model ruchu ulicznego wprowadzony przez Aw i Rascle ponad 20 lat temu. Następnie skupię się na jego wielo-wymiarowym uogólnieniu, które zostało niedawno zaproponowane do opisu przemieszczania się tłumów. Z matematycznego punktu widzenia, jest to układ paraboliczno-hiperboliczny na pograniczu ściśliwych równań Eulera i Naviera-Stokesa, z dyssypacją zależną od gęstości. W jednym wymiarze przestrzennym, ten sam układ opisuje ruch jednakowych kul zanurzonych w lepkim lubrykancie. Na poziomie rozwiązań klasycznych, równania te są równoważne beczłoniowemu układowi równań Naviera-Stokesa z osobliwym współczynnikiem lepkości  $\frac{\varepsilon}{1-\varrho}$ . Zaprezentuję nasze wyniki dotyczące istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla tego układu, oraz przeanalizuję granicę singularną przy  $\varepsilon \rightarrow 0$  dla słabych i dualnych rozwiązań.

W ostatniej części wykładu przejdę do zagadnienia wielowymiarowego, dla którego udowodniliśmy do tej pory istnienie rozwiązań miarowych oraz ich słabo-silną jednoznaczność. Wiemy już także, że problem ten jest źle postawiony w klasie słabych rozwiązań. Dowód tego wyniku używa techniki całkowania wypukłego, która, jak dotąd, stosowana była jedynie dla przypadku ściśliwych przepływów bezlepkościowych. Jako podsumowanie, zaproponuję kilka ciekawych kierunków dalszych badań w tej dziedzinie.

Wykład oparty będzie na kilku publikacjach we współpracy z N. Chaudhuri (Uniwersytet Warszawski), E. Feireisl (Czeska Akademia Nauk), P. Gwiazda (Instytut Matematyczny PAN), L. Navoret (Uniwersytet w Sztrasburgu), C. Perrin (CNRS, Uniwersytet Aix Marsylia), M.A. Mehmood (Imperial College Londyn).

# Odczyty w ramach otwartej sesji dydaktycznej

## NAUCZANIE MATEMATYKI OPARTE O BADANIA

**Maciej Jakubowski**

Uniwersytet Warszawski, Instytut Badań Edukacyjnych

e-mail: [mjakubowski@uw.edu.pl](mailto:mjakubowski@uw.edu.pl)

Nauczanie opiera się często o własne doświadczenie i intuicje. Jeśli przywoływane są badania, to często są to pojedyncze prace, których metodologia też często budzi wątpliwości. Nauczanie matematyki nie jest tu wyjątkiem. Nauczyciele, ale także uczniowie, często korzystają z metod nauczania i uczenia się, które badania wskazują jako mało skuteczne, a mity edukacyjne są częściej wzmacniane niż obalane za pomocą naukowych argumentów. W mojej prezentacji wskazuję źródła miarodajnej wiedzy dotyczącej metodyki nauczania i uczenia się, które w przypadku matematyki są znacznie bogatsze niż dla innych przedmiotów. Mówiąc o metodyce nauczania, odwołuje się do badań z kognitywistyki i tego jak są wykorzystywane przy opracowywaniu i badaniu skutecznych metod nauczania matematyki. Na koniec wskazuje kluczowe elementy systemu, który spowodowałby, że nauczyciele i uczniowie częściej będą opierać się o rzetelne wyniki badań planując własną pracę.

## NEUROROZWOJOWE ASPEKTY NAUCZANIA MATEMATYKI

**Marek Kaczmarzyk**Instytut Biologii, Biotechnologii i Ochrony Środowiska, Uniwersytet Śląski w Katowicach  
e-mail: marek.kaczmarzyk@us.edu.pl

Ośrodkowy układ nerwowy (OUN) człowieka, poddany specyficznej presji selekcyjnej związanej z skrajnie społecznym charakterem gatunku, w ciągu dwóch milionów lat spowodował powstanie mózgu, który uznawany jest za najbardziej złożony system jaki zna nauka. Składająca się z osiemdziesięciu sześciu miliardów neuronów sieć neuronowa wydaje się nie mieć ograniczeń związanych z przetwarzaniem i przechowywaniem informacji.

Perspektywa dzisiejszej złożoności i potencjalnych możliwości związanych z strukturą przesłania nam często kontekst przystosowawczy, który jest kluczem do zrozumienia zarówno możliwości jak i ograniczeń naszych mózgów. W niewielkich, izolowanych od siebie grupach zbieraczy i łowców, dobór naturalny działał przede wszystkim w kierunku usprawnienia komunikacji i zacieśnienia relacji pomiędzy poszczególnymi osobnikami. Prawdopodobieństwo sukcesu ewolucyjnego rosło wraz z doskonaleniem kompetencji związanych z rozwojem języka oraz precyzji rozpoznania i adekwatnego reagowania na stany emocjonalne społecznego otoczenia. Odpowiada temu bardzo wczesny proces reorganizacji struktur mózgu dziecka w stronę systemów stanowiących neurobiologiczne podłoże mowy oraz wyjątkowa wrażliwość mechanizmów lustrzanych.

Ludzkie mózgi, z ich niespotykanymi u innych gatunków rozmiarami, wymuszają jednak przyspieszony poród. Cięża pozwalająca na osiągnięcie pełnej złożoności odpowiadającej tej, z jaką przychodzą na świat inne naczelne, ze względu na rozmiar główki dziecka kończyłaby się śmiercią zarówno dziecka jak i matki. Powoduje to, że ostatnie etapy rozwoju płodowego ludzkie dzieci przechodzą już poza organizmem matki. Wydatki energetyczne, które są konieczne w takich warunkach znacznie opóźniają dojrzewanie poszczególnych struktur ośrodkowego układu nerwowego. Ogólną zasadą dojrzewania OUN jest to, że kolejność w jakiej poszczególne struktury osiągają sprawność jest odwrotna do ich ewolucyjnego wieku. Najstarsze części osiągają dojrzałość w pierwszej kolejności. Ta prawidłowość wpisuje się także w aspekt funkcjonalny. Struktury odpowiedzialne za kompetencje o bardziej podstawowym charakterze, takie jak te związane z fizjologią organizmu, zachowaniami schematycznymi czy emocjami, dojrzewają wcześniej, zaś te, które dotyczą reakcji złożonych i plastycznych odpowiedzi na wymagania środowiska stają się do tego gotowe później. Wczesne przyjście na świat wydłużając proces dojrzewania OUN uwypukla to zjawisko w przypadku ludzi.

W naszej przeszłości ewolucyjnej możliwość i znaczenie przetwarzania głębokiego czy też operacji na symbolach pojawiły się i stały istotne z przystosowawczego punktu widzenia stosunkowo niedawno. Oznacza to, że dojrzewanie tych struktur odbywa się najpóźniej. Procesy związane z racjonalnym przetwarzaniem rzeczywistości, dostrzeganiem związków przyczynowych, planowaniem, czy operacjami na symbolach są, z ewolucyjnego punktu widzenia, najnowszymi osiągnięciami człowieka. Oznacza to, że oceniając kompetencje młodych ludzi w tych obszarach, warto brać poprawkę na prawidłowości neurorozwoju. Tym bardziej, że pełna gotowość ludzkich mózgów w tym zakresie osiągnana jest przez nie znacznie później niż podpowiada nam to intuicja.



# Odczyty specjalne

STANISŁAW ŁOJASIEWICZ I KARIERA JEGO NIERÓWNOŚCI W  
MATEMATYCE

**Bronisław Jakubczyk**

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: jakubczy@impan.pl

Stanisław Łojasiewicz, rozwiązując w 1958 roku równoległe z L. Hörmanderem problem dzielenia Lauranta Schwartza, stworzył technikę, która doprowadziła do rozwiązania wielu innych problemów i powstania teorii zbiorów semi-analitycznych. Podstawą tej techniki jest nierówność jego imienia wiążąca wartości funkcji analitycznej rzeczywistej z odległością od jej punktu osobliwego.

Opowiemy o historii powstania nierówności Łojasiewicza i jej wariantów oraz o problemach do rozwiązania których została użyta przez czołowych matematyków. Gradientowa nierówność Łojasiewicza i jej nieskończenie wymiarowa wersja Łojasiewicza-Simona pozwoliły w ostatnim 25-leciu rozwiązać szereg otwartych problemów związanych ze zbieżnością rozwiązań ewolucyjnych równań cząstkowymi, w tym równań Eulera-Lagrange'a funkcjonałów energii używanych w fizyce matematycznej a nawet w topologii. Użyto jej też w badaniu osobliwości powierzchni minimalnych i odwzorowań harmonicznych, w badaniu różniczkowości riemannowskich i w innych problemach.

Nierówność gradientowa Kurdyki-Łojasiewicza, związana z rozwiniętym przez logików pojęciem struktury O-minimalnej, jest ostatnio szeroko stosowana przy dowodach i szacowaniu szybkości zbieżności różnych wersji algorytmów gradientowych i gradientopodobnych (w optymalizacji, analizie numerycznej, sztucznej inteligencji, głębokim uczeniu, statystycznym uczeniu maszynowym, itp.).



INTUICJA I METODA – MATEMATYCZNE INSPIRACJE W SZTUCE

**Jakub Jernajczyk**

Wydział Grafiki i Sztuki Mediów, Akademia Sztuk Pięknych im. Eugeniusza Gepperta  
we Wrocławiu

e-mail: [jjernajczyk@gmail.com](mailto:jjernajczyk@gmail.com)

W ramach swojego wystąpienia przedstawię zestaw realizacji multimedialnych, które na różnych poziomach odnoszą się do wybranych zagadnień matematycznych (głównie z zakresu podstaw matematyki oraz filozofii matematyki), stanowiąc ich artystyczne komentarze. Przybliżę też główne założenia swojej metody twórczej, akcentując przede wszystkim wątki poznawcze, edukacyjne i popularyzatorskie.

Prezentacja poszerzona zostanie o wybrane dzieła polskich artystów konceptualnych, którzy w swojej twórczości inspirowali się problemami matematyki, m.in. Stanisława Dróżdża, Wandy Gołkowskiej czy Eugeniusza Smolińskiego.



# Aproksymacja, własności wielomianowe i metody geometryczne w analizie

ORGANIZATORZY:

ADAM BIAŁOŻYT (UJ), MACIEJ DENKOWSKI (UJ), RAFAŁ PIERZCHAŁA (UJ)

## O NIERÓWNOŚCIACH TYPU BERNSTEINA

Tomasz Beberok

Uniwersytet Rolniczy w Krakowie  
e-mail: tomasz.beberok@urk.edu.pl

Opowiemy o ostatnio uzyskanych nierównościach typu Bernsteina dla zbiorów zwartych w  $\mathbb{R}^n$ . Referat będzie oparty na wymienionych niżej pracach.

- [1] M. Baran, G. Sroka, On Extremal Functions and V. Markov Type Polynomial Inequality for Certain Subsets of  $\mathbb{R}^N$ , *Constr. Approx.*, 2023, <https://doi.org/10.1007/s00365-023-09653-1>
- [2] T. Beberok, Sharp  $L_p$  Bernstein type inequalities for certain cuspidal domains, *preprint*,
- [3] Y. Ge, Y. Xu, Sharp Bernstein inequalities on simplex, *Constr. Approx.*, (2024). <https://doi.org/10.1007/s00365-024-09680-6>
- [4] A. Kroó,  $L_p$  Bernstein type inequalities for star like Lip  $\alpha$  domains, *J. Math. Anal. Appl.*, **532** (2024), no.2, Paper No. 127986, 16 pp.
- [5] Y. Xu, Bernstein inequality on conic domains and triangle, *J. Approx. Theory*, **290** (2023), Paper No. 105889, 30 pp.

O REGULARNOŚCI ROZWIĄZAŃ PROBLEMU DIRICHLETA DLA  
ZESPOLONEGO OPERATORA MONGE'A-AMPÈRE'A**Rafał Czyż**Uniwersytet Jagielloński  
e-mail: rafal.czyz@uj.edu.pl

Niech  $\Omega$  będzie ograniczonym obszarem hiperwypukłym w  $\mathbb{C}^n$ . Podczas referatu opowiem o regularności rozwiązań problemu Dirichleta dla zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a

$$u \in \mathcal{PSH}(\Omega),$$
$$(dd^c u)^n = f dV_{2n},$$

gdzie  $dV_{2n}$  jest miarą Lebesgue'a w  $\Omega$ , a gęstość  $f \geq 0$  należy do przestrzeni Orlicza  $L(\text{Log}L)^p(\Omega)$ ,  $p > 0$ . W dalszej części przedstawię rezultaty dotyczące stabilności rozwiązań tego równania.

## O NIEZMIENNICZOŚCI WYKŁADNIKA ŁOJASIEWICZA

**Ramzen Dzhafarov**

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: ramzen.dzhafarov@doctoral.uj.edu.pl

Wśród głównych narzędzi teorii osobliwości mamy kilka nierówności Łojasiewicza. Są to: separacja regularna zbiorów, nierówność wzrostowa Łojasiewicza oraz nierówność gradientowa, która odgrywa ważną rolę w dynamice oraz optymalizacji.

Mówimy, że funkcja ciągła  $f$  spełnia nierówność wzrostową w  $0$ , jeśli w pewnym otoczeniu zera norma obrazu punktu z tego otoczenia jest nie mniejsza niż iloczyn stałej dodatniej oraz odległości tego punktu od zbioru zer funkcji  $f$  podniesionej do pewnej potęgi  $\alpha > 0$ . Z kolei, funkcja  $\mathbb{K}$ -analityczna ( $\mathbb{K} := \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ) spełnia nierówność gradientową w  $0$ , gdy w pewnym otoczeniu zera norma gradientu w punkcie z tego otoczenia jest nie mniejsza niż iloczyn stałej dodatniej oraz normy obrazu tego punktu podniesionej do potęgi  $\theta \in [0, 1]$ . Infimum po wszystkich wykładnikach  $\alpha$  (odpowiednio  $\theta$ ) dla których zachodzi nierówność wzrostowa (odpowiednio gradientowa) nazywamy wykładnikiem Łojasiewicza.

Referat będzie poświęcony niezmienniczości bilipschitzowskiej wykładnika Łojasiewicza. Na początku przedstawimy związek pomiędzy wykładnikiem separacji zbiorów a wykładnikiem Łojasiewicza dla nierówności wzrostowej. Następnie skupimy się na niezmienniczości wykładnika Łojasiewicza w przypadku nierówności wzrostowej. Najważniejszą częścią tego referatu będą świeże wyniki dotyczące niezmienniczości wykładnika Łojasiewicza dla nierówności gradientowej zarówno w przypadku rzeczywistym, jak i zespolonym uzyskane wspólnie z dr. hab. Maciejem Denkowskim.

ZASTOSOWANIA ZBIEŻNOŚCI PAINLEVÉ - KURATOWSKIEGO: FUNKCJE  
LIPSCHITZOWSKIE ZE ZBIEŻNYMI SUBRÓŻNICZKAMI CLARKE'A ORAZ  
ZBIEŻNOŚĆ ZBIORÓW ZBIORÓW ZDEFINIOWANYCH PRZEZ ZBIEŻNE  
RÓWNANIA

**Daniel Fatuła**

Afiliacja: Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Wydział Matematyki i Informatyki,  
Łojasiewicza 6

e-mail: [daniel.fatula@doctoral.uj.edu.pl](mailto:daniel.fatula@doctoral.uj.edu.pl)

W tej prezentacji skupimy się na dwóch zastosowaniach zbieżności Painlevé - Kuratowskiego w analizie. Najpierw uogólnimy na funkcje lipschitzowskie twierdzenie o zbieżności funkcji gładkich przy zbieżności lokalnie jednostajnej ich pochodnych (przy założeniu, że te funkcje są zbieżne w co najmniej jednym punkcie i są zdefiniowane na zbiorze otwartym i spójnym). W tym celu wykorzystamy subróżniczkę Clarke'a funkcji lipschitzowskich jako naturalne uogólnienie pochodnych. Natomiast zbieżność lokalnie jednostajna zostanie zastąpiona przez zbieżność Painlevé - Kuratowskiego wykresów.

Następnie zajmiemy się badaniem zbieżności włókien ciągu funkcji, zbieżnego lokalnie jednostajnie. Pokażemy rzeczywiste odpowiedniki twierdzenia Hurwitza, które stwierdza zbieżność zer ciągu funkcji holomorficzych, zbieżnych lokalnie jednostajnie. Równoważnie można to traktować jako zbieżność rozwiązań ciągu równań, gdy zbieżne są te równania.

Referat będzie oparty na pracy [3].

[1] F. Clarke, Generalized gradients and applications, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1975, Volume 205, 247-262

[2] G. Lebourg, Generic differentiability of lipschitzian functions, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1979, Volume 256, 125-145

[3] D. Fatuła, Applications of the Painlevé-Kuratowski convergence: Lipschitz functions with converging Clarke subdifferentials and convergence of sets defined by converging equations, *preprint*, arXiv:2405.06314

## UOGÓLNIONA NIERÓWNOŚĆ ŁOJASIEWICZA DLA MULTIFUNKCJI DEFINIOWALNYCH I SUBANALITYCZNYCH

**Michał Kosiba**

Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki, Łojasiewicza 6, 30-348  
Kraków

e-mail: `michal.kosiba@doctoral.uj.edu.pl`

Podczas referatu zaprezentujemy uogólnienie jednego z klasycznych wyników w geometrii semialgebraicznej - nierówności Łojasiewicza. Jego podstawowa wersja została sformułowana dla dwóch ciągłych funkcji semialgebraicznych na zbiorze zwartym i prezentuje się następująco:

*Niech  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$  będą dwiema ciągłymi funkcjami semialgebraicznymi na zwartym podziorze  $K \subset \mathbb{R}^n$  takimi, że  $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$ . Wtedy istnieją  $C, N > 0$  takie, że:*

$$|f(x)| \geq C|g(x)|^N, \quad x \in K.$$

W [3] zostało pokazane, że pod pewnymi warunkami możemy opuścić założenie ciągłości jednej z funkcji. W [2] możemy znaleźć nierówność Łojasiewicza dla dowolnej struktury o-minimalnej, natomiast tu znów wymagana jest ciągłość obydwu funkcji. W trakcie referatu pokażemy, że dodając pewne naturalne założenia, możemy uzyskać nierówność Łojasiewicza dla dowolnej struktury o-minimalnej rezygnując jednocześnie z założenia ciągłości obydwu funkcji, wymagając jedynie ograniczoności modułu jednej z nich. Ponadto zaprezentowana wersja twierdzenia będzie odnosić się do funkcji zdefiniowanych na dowolnym zbiorze. Nie będziemy wymagać jego zwartości, ani nawet domkniętości.

Kolejnym punktem referatu będzie przyjrzenie się nierówności Łojasiewicza dla sytuacji subanalitycznej. Przypadek ten okazuje się być bardziej subtelnym. Pewna wersja nierówności dla funkcji globalnie subanalitycznych została przedstawiona w [4]. Podczas referatu pokażemy, że jesteśmy w stanie uzyskać podobny rezultat jak w przypadku definiowalnym dodając jednak założenie o ograniczoności dziedziny. Jednocześnie zaprezentujemy przykład ilustrujący niemożność uzyskania bezpośredniego odpowiednika twierdzenia z sytuacji definiowalnej.

Uzyskane rezultaty wykorzystamy do przypadku multifunkcji. Wprowadzając różne typy przeciwobrazu multifunkcji, będziemy w stanie sformułować kilka rodzajów nierówności Łojasiewicza dla multifunkcji definiowalnych oraz subanalitycznych. W szczególności wyeliminujemy pewną lukę pojawiającą się w [1].

Na koniec zaprezentowane rezultaty zilustrujemy na przykładzie multifunkcji punktów najbliższych oraz multifunkcji punktów dla których dany punkt ze zbioru jest punktem najbliższym.

[1] M.P. Denkowski, P. Pełczyńska, On definable multifunctions and Łojasiewicz inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* vol. 456 no. 2, 2017, 1101-1122

[2] L. Van Den Dries, C. Miller, Geometric Categories and O-Minimal Structures, *Duke Math. Journ.* 84 no. 2, 1995, 497-540

[3] J. H. Lee, T. Pham, Openness, Hölder metric regularity and Hölder continuity properties of semialgebraic set-valued maps, *SIAM J. Optimiz.* vol. 32, Iss. 1, 2022, 56-74

[4] A. Valette, Łojasiewicz inequality at singular points, *P. Am. Math. Soc.* vol. 147, 2019, 1109-1117



## NIERÓWNOŚCI WIELOMIANOWE NA ZBIORACH ALGEBRAICZNYCH

Agnieszka Kowalska

Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

e-mail: agnieszka.kowalska@uken.krakow.pl

Z podstawowymi twierdzeniami aproksymacji dla zbiorów  $C^\infty$ -determinujących ściśle wiążą się pewne nierówności wielomianowe, za pomocą których przeprowadza się wiele dowodów. Szczególnie ważne wydają się tutaj nierówności Markowa, Pleśniaka i Schura. W tego typu nierównościach głównym problemem jest uzyskanie odpowiedniej zależności stałych od stopnia wielomianu. Referat będzie omówieniem uzyskanych w ostatnich latach wyników dotyczących odpowiedników nierówności wielomianowych na podzbiorach zwartych zbiorów algebraicznych. Zbiory algebraiczne są zdefiniowane przez układy równań wielomianowych, a zatem nie są determinujące nawet dla wielomianów. Podana zostanie charakteryzacja zwartych podzbiorów spełniających nierówność Markowa na hiperpowierzchniach algebraicznych jak również na niektórych zbiorach algebraicznych określonych przez kilka równań. Omówione zostaną również inne nierówności wielomianowe na tych zbiorach. Ponadto pokazane zostanie zastosowanie nierówności uzyskanych na zbiorach algebraicznych do efektywnej konstrukcji pewnych użytecznych węzłów interpolacyjnych, zwanych sieciami dopuszczalnymi lub zbiorami normującymi. Referat będzie oparty na pracach [1] i [2].

[1] L. Bialas-Ciez, J.-P. Calvi, A. Kowalska, Markov and division inequalities on algebraic sets, *Results Math.*, 2024, 79, 135

[2] L. Bialas-Ciez, A. Kowalska, Polynomial meshes on algebraic sets, *preprint*,

APROKSYMACJA STAŁYCH LEBESGUE’A  
ZA POMOCĄ SIATEK PUNKTÓW CZEBYSZEWA

**Mateusz Suder**

Uniwersytet Jagielloński

Wydział Matematyki i Informatyki

e-mail: `mat.suder@student.uj.edu.pl`

Przedstawię zastosowanie pewnych sieci związanych z punktami Czebyszewa do aproksymowania stałych Lebesgue’a pewnej klasy projekcji na przestrzeń wielomianów zawierającej interpolację, operatory Bernsteina oraz operatory najmniejszych kwadratów z wagami. Sieci punktów będą tworzone na pewnych krzywych na płaszczyźnie zespolonej, kostkach i kulach w  $\mathbb{R}^N$  oraz na trójkątach.

Ponadto skonstruuję pewne optymalne sieci dopuszczalne na kulach i trójkątach oraz porównam je z innymi sieciami punktów badanymi w ostatnich latach. W tym celu posłużymy się eksperymentami numerycznymi opartymi na przybliżaniu promienia pokrycia względem metryki Dubinera.

Prezentacja nawiązuje do trzech prac: [1], [2] i [3].

[1] L. Bialas-Ciez, D. Kenne, A. Sommariva, M. Vianello, Chebyshev admissible meshes and Lebesgue constants of complex polynomial projections, *J. Comput. Appl. Math.*, 2024, 443, 15766

[2] L. Bialas-Ciez, D. Kenne, A. Sommariva, M. Vianello, Evaluating Lebesgue constants by Chebyshev polynomial meshes on cube, simplex and ball, *preprint*, [arxiv.org/abs/2311.18656](https://arxiv.org/abs/2311.18656), 2023

[3] L. Bialas-Ciez, M. Suder, Note on admissible meshes on ball and simplex via Dubiner metric, *submitted*,

# Badania z zakresu dydaktyki matematyki

ORGANIZATORZY:

NATALIA CIEŚLAR (UŚ), EDYTA JUSKOWIAK (UAM), MIROŚŁAWA SAJKA (UKEN)

## KILKA UWAG O PISANIU PRAC DYDAKTYCZNYCH Z ALGEBRY

Waldemar Hołubowski

Politechnika Śląska, Wydział Matematyki Stosowanej

e-mail: w.holubowski@polsl.pl

Pisanie prac dydaktycznych z algebry wymaga odpowiedniej wiedzy matematycznej, ścisłości i poszanowania czytelnika [5].

Profesjonalni matematycy mogą sobie pozwolić na pewne nieścisłości w artykułach naukowych. Ich odbiorcami są inni naukowcy, którzy są w stanie poprawić oczywiste błędy, nieścisłe sformułowania, czy zapełnić luki w dowodach.

Odpowiedzialność autorów artykułów dydaktycznych jest dużo większa, jeżeli zwracają się oni do uczniów i studentów, dla których matematyka może być trudnym przedmiotem.

Na przykładzie analizy wielu artykułów dydaktycznych z algebry wymienionych w bibliografii pokażemy na przykładach, jak drobne błędy mogą mieć poważne konsekwencje dla niedoświadczonych czytelników. Z sugerujemy też propozycje poprawy zakwestionowanych sformułowań.

[1] K. Adrianowicz, Macierze odwrotne. Część I- definicje własności, wyznaczanie macierzy odwrotnych z definicji, *MINUT*, 2023, 183–194

[2] K. Adrianowicz, Determinant - a short tutorial, *MINUT*, 2023, 165–182

[3] K. Adrianowicz, I. Nowak, Dlaczego eliminacja Gaussa działa i dlaczego jest taka pomocna?, *MINUT*, 2023, 149–164

[4] K. Adrianowicz, I. Nowak, Po co nam ta matematyka? Zastosowania algebry liniowej nie tylko dla studentów pierwszych lat studiów technicznych., *Wydawnictwo Politechniki Śląskiej*, 2016

[5] W. Hołubowski, Dlaczego źle uczymy inżynierów matematyki, *OKNMUT XIX*,

<https://www.youtube.com/watch?v=ITVBUjxTwOI>

[6] M. Maciaszczyk, Liczby zespolone- postać algebraiczna w wersji lekkostrawnej, *MINUT*, 2022, 70-80

[7] B. Pawlik, Postać trygonometryczna liczb zespolonych, *MINUT*, 2022, 16-25

[8] K. Sawicz, Rozwiązywanie układów równań za pomocą wzorów Cramera, *MINUT*, 2023, 227-236

[9] K. Sawicz, Rozwiązywanie układów równań metoda eliminacji Gaussa, *MINUT*, 2023, 237-245

ANALIZA WYBRANYCH MODELI ROZWIĄZAŃ REALISTYCZNYCH ZADAŃ  
Z OPTYMALIZACJI LINIOWEJ PRZEZ STUDENTÓW Z WYKORZYSTANIEM  
TECHNIK KOMPUTEROWYCH

**Adrian Karpowicz**

Instytut Matematyki, Uniwersytet Gdański

e-mail: [adrian.karpowicz@ug.edu.pl](mailto:adrian.karpowicz@ug.edu.pl)

Jednymi z kluczowych kompetencji przyszłości są kompetencje cyfrowe i technologiczne (zobacz [1]). Obejmują one szerokie spektrum umiejętności. Jedną z takich umiejętności jest rozwiązywanie różnego typu problemów za pomocą technologii. W swoim wystąpieniu chciałbym przedstawić analizę rozwiązań realistycznych zadań z programowania liniowego w arkuszu kalkulacyjnym przez studentów matematyki. Problem dotyczył maksymalizacji funkcji celu (zysku ze sprzedaży) przy pewnych dodatkowych ograniczeniach (związanych z ograniczoną ilością potrzebnego surowca do produkcji i czasu). Dzięki temu, że Excel ma wbudowany algorytm rozwiązujący problem optymalizacji liniowej (algorytm simpleks), można było się skupić przede wszystkim na budowie modelu matematycznego.

W analizie prac studentów wyróżniłem zasadniczo dwa różne (oba poprawne) modele matematyczne układane do jednego problemu. Przeanalizuję również błędy, jakie pojawiały się w budowanych modelach i spróbuję odpowiedzieć na pytanie, skąd one mogły wynikać. Postaram się wysnuć wnioski na temat tego, co robić, aby podnieść kompetencje studentów lub uczniów w budowaniu modeli matematycznych realistycznych problemów.

[1] K. Dębkowska, U. Kłosiewicz-Górecka, A. Szymańska, P. Ważniewski i K. Zybortowicz, Kompetencje pracowników dziś i jutro, *Polski Instytut Ekonomiczny*, 2022

## PRZEJAWY ROZUMOWANIA MATEMATYCZNEGO U MAŁYCH DZIECI NA PODSTAWIE ZADANIA KOMBINATORYCZNEGO

**Bożena Maj-Tatsis**

Uniwersytet Rzeszowski

e-mail: bmaj@ur.edu.pl

Rozumowanie matematyczne jest kluczowym elementem myślenia matematycznego, które może się manifestować nawet u małych uczniów, pod warunkiem zapewnienia im odpowiednich kontekstów [1]. Autorzy pracy [3] stwierdzają, że „w ciągu ostatnich 25 lat nastąpił wzrost zainteresowania badaniami nad rozumowaniem matematycznym wśród młodszych uczniów” (s. 15). Niemniej jednak, brak jest zgody co do tego, czym jest rozumowanie matematyczne; dodatkowo, jego opisy w różnych dokumentach programowych są czasem „niejasne, niesystematyczne, a nawet sprzeczne między sobą” [4, s. 2]. W oparciu o podejście komognitywne do nauczania matematyki [6], na potrzeby naszego badania przyjmujemy dyskursywną perspektywę rozumowania matematycznego. Zgodnie z tą perspektywą, rozumowanie matematyczne można szeroko zdefiniować „jako proces komunikacji z innymi lub z samym sobą, który pozwala na wnioskowanie wypowiedzi matematycznych z innych wypowiedzi matematycznych” [4, s. 7]. Ta perspektywa podkreśla nie tylko interaktywny charakter rozumowania, ale także znaczenie ustanowienia odpowiednich norm dla przewidywanych interakcji. Jednocześnie, jak już wspomniano, kontekst odgrywa istotną rolę w pracy z młodszymi uczniami, co czyni projektowanie zadań bardzo ważnym.

Mając to na uwadze, zaprojektowaliśmy eksperyment z udziałem 20 uczniów klasy trzeciej. Uczniowie rozwiązywali i dyskutowali nad trzema zadaniami matematycznymi, które spełniały następujące warunki: miały na celu rozbudzenie ich zainteresowania, były możliwe do rozwiązania na więcej niż jeden sposób, ale bez użycia trików, powinny ilustrować ważne idee matematyczne oraz służyć jako pierwsze kroki do poszukiwań matematycznych [5]. W niniejszym opisie skupiamy się na zadaniu, które miało na celu rozwijanie rozumowania kombinatorycznego. Zadanie „Rybki”, którego polecenie brzmiało: „Ile rybek możesz pokolorować trzema kolorami, tak aby każda rybka była inna? Masz trzy kolory: zielony, pomarańczowy i niebieski”, polegało na pokolorowaniu rybek - każdej podzielonej na trzy części - przy użyciu trzech różnych kolorów. Nasze pytania badawcze były następujące: a) Jakie aspekty rozumowania matematycznego zaobserwowano podczas pracy nad zadaniem? b) Jakie strategie rozwiązywania zaobserwowano podczas pracy nad zadaniem?

Do analizy materiału badawczego wykorzystaliśmy teorie [4] oraz [7], co pozwoliło na identyfikację poszczególnych aspektów rozumowań matematycznych u uczniów. Dodatkowo, ponieważ interesowały nas również strategie rozwiązywania uczniów, zastosowaliśmy ramy analityczne [2] dla zadań kombinatorycznych. W szczególności, kategoryzowaliśmy wypowiedzi uczniów na podstawie ich treści i obserwowaliśmy ich ewolucję od, np. losowego wyboru elementów do bardziej systematycznego wzorca w wyborze elementów. Niniejsze badania wnoszą trzy istotne elementy. Po pierwsze, wzbogacamy istniejącą literaturę na temat rozumowania matematycznego małych uczniów, pokazując, że można je zaobserwować w zadaniach, których kontekst jest matematycznie bogaty, a zarazem zabawowy (w tym przypadku aspekt kolorowania). Po drugie, pokazujemy, jak adaptacja istniejących ram teoretycznych może pomóc badaczom (lub nauczycielom) w skutecznym

identyfikowaniu przejawów rozumowania matematycznego wśród uczniów. Po trzecie, prezentujemy przykłady, w których istotne znaczenie miały interakcje między uczniami oraz między uczniami a dorosłymi w kształtowaniu i wzmacnianiu możliwości rozumowania matematycznego, a przez to podkreślamy rolę nauczyciela/badacza w tym procesie.

- [1] D. Clements, J. Sarama, Learning and Teaching Early Math. The Learning Trajectories Approach (3rd ed.), *Taylor and Francis*, 2020
- [2] L. D. English, Young children's combinatorics strategies, *Educational Studies in Mathematics*, 1991, 22(5), 451–474
- [3] M. Goos, S. Kaya, Understanding and promoting students' mathematical thinking: a review of research published in ESM, *Educational Studies in Mathematics*, 2020, 103(1), 7–25
- [4] D. Jeannotte, C. Kieran, A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 2017, 96(1), 1–16
- [5] A. H. Schoenfeld, Reflections on doing and teaching mathematics. [W] A. H. Schoenfeld (Red.), *Mathematical thinking and problem solving* (s. 53–70), *Lawrence Erlbaum Associates.*, 1995
- [6] A. Sfard, Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing, *Cambridge University Press*, 2008
- [7] C. Vale, W. Widjaja, S. Herbert, L. A. Bragg, E. Y.-K. Loong, Mapping Variation in Children's Mathematical Reasoning: The Case of 'What Else Belongs?', *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2017, 15(5), 873–894

## ROZUMOWANIE REDUKCYJNE STUDENTÓW PEDAGOGIKI W PROCESIE ROZWIĄZYWANIA ZADANIA TEKSTOWEGO PT.: ILE BYŁO PERŁ W SZKATUŁCE?

**Barbara Nawolska**

Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, Instytut Pedagogiki, Polska  
e-mail: [barbara.nawolska@up.krakow.pl](mailto:barbara.nawolska@up.krakow.pl)

Każdemu człowiekowi, niezależnie od roli jaką przyjdzie mu pełnić w życiu, potrzebna jest szeroko rozumiana umiejętność dostrzegania i rozwiązywania problemów w różnorodnych sytuacjach życiowych i zawodowych. A przy tym ważna jest umiejętność logicznego i krytycznego myślenia oraz prowadzenia wnioskowań dedukcyjnych i redukcyjnych. Umiejętności tej uczymy się przez całe życie i im wcześniej zacniemy się tego uczyć, tym lepsze efekty osiągniemy. Nie bez powodu więc w podstawie programowej z 14 lutego 2017 r. zapisano, że „Kształcenie w szkole podstawowej stanowi fundament wykształcenia” (Podstawa programowa, 2017, s. 11). Zaś celem tego kształcenia jest

„rozwijanie kompetencji, takich jak: kreatywność, innowacyjność i przedsiębiorczość; rozwijanie umiejętności krytycznego i logicznego myślenia, rozumowania, argumentowania i wnioskowania (...) wyposażenie uczniów w taki zasób wiadomości oraz kształtowanie takich umiejętności, które pozwalają w sposób bardziej dojrzały i uporządkowany zrozumieć świat” (tamże).

Wymienione cele można osiągnąć m.in. w ramach edukacji matematycznej poprzez rozwiązywanie zadań tekstowych, ponieważ zadania tego typu stanowią szczególnie przypadek sytuacji problemowej. Umiejętność ich rozwiązywania ma więc, oprócz walorów edukacyjnych, wielki wymiar praktyczny będąc paradygmatem działania w każdej sytuacji problemowej. Tym samym uczenie się matematyki służy rozwijaniu logicznego i krytycznego myślenia. Właśnie logiczne i krytyczne myślenie jest tym, czego najbardziej potrzebujemy współcześnie i co będzie przydatne w nieznanym nam jeszcze przyszłości tak w życiu prywatnym jak i zawodowym. Zatem największym wyzwaniem jakie stoi przed szkołą jest takie wykształcenie uczniów, by byli ludźmi myślącymi logicznie i krytycznie. Nie da się tego osiągnąć bez dobrze wykształconych nauczycieli, którzy sami potrafią myśleć logicznie i krytycznie.

Elementami logicznego myślenia jest rozumowanie dedukcyjne i redukcyjne. Dedukcja jest rozumowaniem wprost, tzn. na podstawie znanych **racji** (przyczyn) wnioskuje się o **następstwach** (skutkach). Zaś **redukcja** jest rozumowaniem wstecz tzn. na podstawie następstw (skutków) wnioskuje się o ich racji (o przyczynach), w tym rozumowaniu cofamy się od faktów do ich przyczyn (Czyżewski, 1993). To rozumowanie jest ważne zarówno w matematyce jak i w wielu sytuacjach praktycznych, np. w diagnozie medycznej<sup>1</sup>.

Ponieważ umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych, jest kluczową kompetencją, więc nauczyciele a także studenci pedagogiki, jako przyszli nauczyciele, powinni umieć rozwiązywać takie zadania, by móc je wykorzystywać w pracy z dziećmi. Wobec powyższego w kształceniu przyszłych nauczycieli nie może braknąć zadań redukcyjnych. W swoim wystąpieniu przedstawię, na przykładzie zadania o perłach, wyniki badania umiejętności rozwiązywania zadań redukcyjnych przez studentów pedagogiki przedszkolnej i wczesnoszkolnej.

---

<sup>1</sup>Lekarz na podstawie skutków choroby pacjenta, musi ustalić jej przyczynę (ustala co wywołało objawy chorobowe).



**Zadanie.** Maharadża obdarował 3 swoje córki perłami przechowywanymi w szkatułce. Najstarszej dał połowę zawartości szkatułki i jedną perłę, młodszej połowę reszty i jedną perłę, a najmłodszej połowę pozostałych pereł i jeszcze 3 perły i wówczas szkatułka pozostała pusta. Ile pereł miał Maharadża w szkatułce i ile pereł dostała każda córka?

Warunkiem koniecznym poprawnego rozwiązania zadania jest jego zrozumienie. Składa się na to warstwa werbalna (językowa) jak i warstwa pojęciowa. W tym przypadku trzeba zrozumieć co znaczy „połowa”, że wielkość połowy zależy od wielkości całości dzielonej. Potrzebna jest jeszcze umiejętność matematyzowania sytuacji przedstawionej w zadaniu, która powinna rosnać wraz z doświadczeniem a co za tym idzie – z wiekiem rozwiązującego. Czy studenci, posiadający duże doświadczenie (prawie 15 lat nauki), umieją czytać ze zrozumieniem i umieją zmatematyzować sytuację opisaną w zadaniu redukcyjnym? Czy rozumowanie redukcyjne jest w zasięgu badanych studentów? Czy potrafią rozwiązać takie zadanie w sposób dostępny uczniom klas młodszych? Czy umieją posłużyć się rysunkową prezentacją sytuacji opisanej w zadaniu?

[1] T. Czyżewski, Myślenie i rozumowanie jako przedmiot psychologii i logiki, [w:] *Encyklopedia pedagogiczna*, W. Pamykało (red.), 398–401. Wydawnictwo Fundacja Innowacja, 1993

[2] , Podstawa programowa, Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz (...) kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej (...) Dz. U. 24.02.2017, poz. 356, ,

[3] G. Polya, Jak to rozwiązać?, *Wydawnictwo Naukowe PWN*, 1993

[4] R. Stefańska-Klar, Późne dzieciństwo. Młodszy wiek szkolny, [w:] *Psychologia rozwoju człowieka t II*, B. Harwas-Napierala, J. Trempała (red.), 130–155. PWN, 2006

## ROZUMIENIE ZAGADNIENIA PRZEKSZTAŁCEŃ GEOMETRYCZNYCH PRZEZ NAUCZYCIELI EDUKACJI WCZESNOSZKOLNEJ

**Marta Pytlak**

Uniwersytet Rzeszowski  
e-mail: mpytlak@ur.edu.pl

**Ewa Swoboda**

Państwowa Akademia Nauk Stosowanych w Jarosławiu  
e-mail: ewa.swoboda@pwste.edu.pl

Rozumowanie geometryczne ma swoją specyfikę, która wciąż nie jest w pełni zbadana. Wiele wskazuje na to, że tworzenie pojęć geometrycznych przebiega inaczej niż pojęć arytmetycznych. Badacze podkreślają, że pierwszym źródłem podstawowych pojęć geometrycznych jest informacja wizualna, ale do rozwoju rozumowania geometrycznego potrzebne jest obrazowanie ruchu. Uczeń powinien umieć wyobrazić sobie efekt pewnych działań wykonywanych *na* obiekcie geometrycznym lub jego elementach (np. wykonanie przekroju, wydłużenie wysokości, zmiany kąta wewnętrznego), a także efekt działań wykonywanych *tym* obiektem (np. przegrupowanie bryły w konstrukcji z sześciątów, równoległe przemieszczenie lub obrót wokół ustalonego punktu o określony kąt). Tylko dzięki takim pomysłom możliwe będzie rozwiązanie dużej grupy problemów geometrycznych. W ten sposób dynamiczne rozumowanie jest niezbędną umiejętnością dla pewnej klasy problemów geometrycznych.

Potrzebę konkretnych interwencji związanych z kształtowaniem takich umiejętności wyrazili badacze skupieni wokół M. Hejny'ego (zobacz: [2], [3], [5]). Warto szukać propozycji nauczania, które pozwolą uczniowi działać w otaczającej go rzeczywistości. Poprzez wykorzystanie własnych doświadczeń (nieformalnych) możliwe jest formułowanie intuicji dotyczących dynamicznych idei geometrycznych. Takie podejście jest zgodne z całą drogą, jaką przeszła ludzkość, kiedy to koncepcje i procedury geometryczne kształtowały się na podstawie działań praktycznych (takich jak tworzenie budynków, poruszanie się w przestrzeni, konstruowanie narzędzi czy korzystanie z projektowania) [1], [4]. W Polsce problem poszukiwania ścieżki dydaktycznej ukierunkowanej na matematyzację ruchu (prowadzącej studentów do odkrycia własności i opisu pewnych przekształceń izometrycznych) ma długą tradycję badawczą. Jednym z wątków tych wielokierunkowych badań było zbadanie możliwości studentów, będąc na poziomie predefinicyjnym, do stworzenia idei obrotu na płaszczyźnie. Wyniki ostatnich badań [6] sugerują, że istnieją pewne specyficzne problemy dydaktyczne, na które nauczyciele powinni być wrażliwi, pracując nad budowaniem intuicji rotacji wśród dzieci.

Naszym zdaniem środowiskiem, które przybliży uczniom ideę ruchu obrotowego, może być analiza ruchu zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Wskazówki są sztywno zamocowane na środku tarczy zegara, co w naturalny sposób podkreśla funkcję środka obrotu. Konieczne jest jednak skonstruowanie zadania w taki sposób, aby można było zwrócić uwagę na dodatkowe warunki definiujące sztywny obrót. Ponadto nauczyciele muszą być świadomi, na jakie elementy zwracać uwagę podczas analizy pracy uczniów. Czy jednak nauczyciele mogą patrzeć na propozycje zadań na tyle szeroko, aby wykorzystać je do

budowania intuicji i skojarzeń z różnymi tematami matematycznymi? Problem ten był głównym pytaniem badawczym opisanym w niniejszym opracowaniu.

- [1] M. Hejný, Teória vyučovania matematiky 2, *Slovenske Pedagogicke Nakladatelstvo*, 1990
- [2] M. Hejný, Budování geometrických proceptů, 7. *Setkání učitelů všech stupňů a typů škol*, 2000, 11–17
- [3] M. Hejný, D. Jirotková, J. Slezaková, J. Michnova, Matematika, pro 1. ročník základní školy, I – II díl, *Fraus*, 2009
- [4] D.W. Henderson, D. Taimina, Experiencing Geometry, Euclidean and Non- Euclidean with History (3rd Edition), *Pearson Prentice Hall*, 2005
- [5] D. Jirotková, Scheme of geometrical concepts, *13th International Congress on Mathematical Education*, 2016
- [6] E. Swoboda, B. Maj-Tatsis, M. Pytlak, Moving from research to teaching geometric rotation according to genetic constructivism, *wdruku*, 2024

# WSPÓŁZMIENNOŚCIOWE ROZUMIENIE FUNKCJI JAKO NARZĘDZIA DO OPISU RUCHU – BADANIE Z WYKORZYSTANIEM EYE-TRACKINGU

Mirosława Sajka

Instytut Matematyki, Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej, Kraków

e-mail: mirosława.sajka@uken.krakow.pl

Umiejętność interpretacji wykresów funkcji, jak i umiejętność matematyzacji z wykorzystaniem funkcji są kluczowe nie tylko w matematyce, ale też ogólnie dla rozumienia i uprawiania nauki, a także są potrzebne dla rozumienia sytuacji z życia codziennego.

Funkcja może być rozumiana w czterech aspektach: (1) jako reguła typu wejście-wyjście, podkreślając jej obliczeniowy charakter (np. [1]); (2) jako dynamiczny proces współzmienności między zmienną niezależną a zmienną zależną (np. [2]); (3) jako relacja przyporządkowania, „mapowanie” (np. [3]); oraz (4) jako obiekt matematyczny, który może być np. badany, porównywany lub łączony z innymi obiektami matematycznymi (np. [1], [4]).

W referacie przedstawię fragment szerszych badań empirycznych nad rozumieniem funkcji w kontekście opisu ruchu, a zatem rozumienia funkcji głównie w aspekcie (2), jako dynamicznego procesu współzmienności. Badania były realizowane w ostatnich latach wśród uczniów liceum i studentów – przyszłych nauczycieli matematyki w triangulacji metodologicznej z wykorzystaniem eye-trackingu, pisemnego kwestionariusza oraz indywidualnego wywiadu otwartego pogłębionego.

W referacie przedstawię analizę trudności, jakich doznają uczniowie szkół średnich i studenci podczas opisu ruchu w postaci wykresu funkcji. Analiza wyników dostarcza nam wielu informacji na temat sposobu interpretacji wykresów u uczniów i studentów, pokazuje między innymi, że pomimo rozumienia wykresów na poziomie odczytu danych i czytania między danymi [5], większość badanych udziela błędnych odpowiedzi w sytuacji analizy elementarnego ruchu, znanego im z życia codziennego (jak np. pionowy rzut kamieniem, chodzenie po schodach). Ujawniły się różne interpretacje przedstawionych sytuacji, a większość błędnych odpowiedzi ma swoją przyczynę w utożsamianiu wykresu ruchu z trajektorią ruchu. Taka błędna interpretacja jest znana z literatury (np. [6]), natomiast badanie pozwoliło na zdiagnozowanie i skategoryzowanie różnych jej odmian. Dodatkowo u niektórych uczniów i studentów zaobserwowano brak umiejętności myślenia współzmiennościowego w badanym kontekście. Interesujące jest to, że zadania zaproponowane w badaniu zostały ocenione przez badanych jako raczej łatwe, natomiast ich rozwiązywalność w każdym przypadku wyniosła poniżej 50%, co oznacza zadania trudne. Zarówno ten fakt, jak i dane okulograficzne zarejestrowane podczas badań eye-trackingowych pokazuje wpływ tzw. „Systemu 1” [7] i podejścia intuicyjnego [8], czy pseudoanalitycznego [9] w rozwiązywaniu takich zadań.

W referacie przedstawię kilka propozycji obecnie wypracowywanych metod zaradczych, które są w trakcie weryfikacji, w jaki sposób można pracować z uczniami i studentami nad poprawą rozumienia funkcji w omawianym kontekście.

[1] A. Sfard, On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 1991, 22(1), 1–36

[2] P. W. Thompson, M. P. Carlson, Variation, covariation, and functions: foundational ways of thinking mathematically, In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2017, pp. 421–456

[3] R. R. Skemp, *The psychology of learning mathematics, Expanded American edition*. Routledge, 2012

ANALIZA ZALEŻNOŚCI MIĘDZY CZĘSTOTLIWOŚCIĄ POWROTÓW DO  
ZADAŃ A CZASEM ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ WŚRÓD LICEALISTÓW I  
ÓSMOKLASISTÓW W POLSCE

**Jacek Stańdo**

Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej

e-mail: jacek.stando@p.lodz.pl

**Żywilla Fechner**

Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka

e-mail: zywilla.fechner@p.lodz.pl

W 2022 roku przeprowadziliśmy badanie na terenie Polski, które objęło około 10 tysięcy uczniów klas ósmych i maturzystów. Zaproszenia do udziału w próbnym egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie podstawowym oraz w próbnym egzaminie ósmoklasisty z matematyki zostały wysłane do wszystkich szkół ponadpodstawowych i podstawowych według bazy SIO. Test dla ósmoklasistów zawierał 18 pytań, natomiast test dla maturzystów 35 pytań. Oba testy były uzupełnione o ankietę oceniającą mocne i słabe strony uczniów. Duża liczba uczestników badania potwierdza wiarygodność wyników i podkreśla, że są to pionierskie badania w Polsce.

Dzięki elektronicznej formie testów możliwa była szczegółowa analiza częstotliwości powrotów do zadań oraz czasu poświęconego na ich rozwiązywanie. Przeprowadziliśmy różnorodne analizy danych zebranych z ankiet. W niniejszej prezentacji przedstawimy analizę zależności między częstotliwością powrotów do zadań a czasem ich rozwiązywania, osobno dla grupy licealistów i ósmoklasistów. W innej pracy analizowaliśmy również mocne i słabe strony uczniów w zależności od wyników testu oraz ocen z matematyki. Wyniki tych badań pozwalają na lepsze zrozumienie strategii rozwiązywania zadań przez uczniów na różnych etapach edukacji oraz identyfikację obszarów wymagających wsparcia dydaktycznego.

[1] J. Stańdo, Trajektorie i walidacja efektów uczenia się na przykładzie przedmiotu matematyka, *Monografie Politechniki Łódzkiej*, 2023



# Biomatematyka

ORGANIZATORZY:

RYSZARD RUDNICKI (IM PAN), RADOSŁAW WIECZOREK (UŚ)

## WPLYW OPÓŹNIEŃ WYNIKAJĄCYCH Z CZASU DOJRZEWANIA NA DYNAMIKĘ EKOLOGICZNO-EWOLUCYJNĄ W GRACH EWOLUCYJNYCH

**Krzysztof Argasiński**

Wydział Matematyki Uniwersytet Warszawski

e-mail: jargas1@wp.pl

**Jacek Mięgisz**

Wydział Matematyki Uniwersytet Warszawski

e-mail: miekisz@uw.edu.pl

Prezentacja przedstawi wyniki dwóch niepublikowanych prac, kontynuujących wcześniejsze badania nad demograficznymi grami ewolucyjnymi (Argasiński i Broom 2012, 2018a, 2018b). Podejście demograficzne zakłada, że zamiast jednej funkcji wypłat opisującej darwinowskie dostosowanie, istnieją dwie funkcje wypłat opisujące narodziny i zgony. To podejście pozwala na wprowadzenie różnych form regulacji wielkości populacji zależnej od zagęszczenia, takich jak rekrutacyjne prawdopodobieństwo przeżycia młodocianych.

Zacniemy od przedstawienia zaktualizowanych demograficznych funkcji wypłat, uwzględniających prawdopodobieństwa wygranej/przegranej podczas konfliktów z określoną strategią. Zaktualizowana struktura funkcji wypłat jest bardziej odpowiednia do opisywania gier z niepodzielną nagrodą niż podejście z poprzednich prac. Dodatkowo, istniejące warunki stabilności ekologiczno-ewolucyjnej zostaną uzupełnione przez wprowadzenie tzw. subnullklin – powierzchni łączących stabilne i niestabilne punkty stacjonarne, przyciągających trajektorie zanim osiągną stabilny punkt stacjonarny.

Następnie rozszerzymy ramy modelowania przez dodanie opóźnienia dojrzewania dla noworodków. To implikuje zastosowanie równań różniczkowych z opóźnieniem. Powstałe modele są bardzo wrażliwe na wpływ czynników zewnętrznych, co zostanie wykazane poprzez dodanie czynnika sezonowej śmiertelności lub presji drapieżników modelowanego przez prosty system Lotki-Volterry. Symulacje numeryczne uzyskanych modeli wykazują bardzo złożone zachowanie, w tym skomplikowane oscylacje i cykle, a nawet chaos. Jednym z zaskakujących wyników jest to, że w niektórych przypadkach wpływ opóźnienia zanika w pobliżu subnullklin.

[1] K Argasinski, M Broom, Ecological theatre and the evolutionary game: how environmental and demographic factors determine payoffs in evolutionary games, *Journal of Mathematical Biology*, 2013, 67, 935–962

[2] K Argasinski, M Broom, Interaction rates, vital rates, background fitness and replicator dynamics: how to embed evolutionary game structure into realistic population dynamics., *Theory in Biosciences*, 2018a, 137, 33–50

[3] K Argasinski, M Broom, Evolutionary stability under limited population growth: Eco-evolutionary feedbacks and replicator dynamics, *Ecological Complexity*, 2018b, 34, 198–212

[4] K Argasinski, M Broom, A book, *Cambridge University Press*, 2024



## OD WYPUKŁYCH ROZKŁADÓW REZOLWENT DO TWIERDZEŃ O GENEROWANIU

Adam Gregosiewicz

Politechnika Lubelska

e-mail: a.gregosiewicz@pollub.pl

Twierdzenie Hille'a-Yosidy, fundament teorii półgrup operatorów, dostarcza warunków koniecznych i wystarczających aby dany operator był generatorem mocno ciągłej półgrupy. Sprawdzenie tych warunków bywa jednak w praktyce trudne, gdyż wyrażone są one w terminach potęg rezolwent wyjściowego operatora. Opracowano w związku z tym wiele metod, które pozwalają na uniknięcie bezpośredniej weryfikacji warunków Hille'a-Yosidy. Podczas referatu wprowadzę nowe narzędzie, wykorzystujące rozkład rezolwenty na wypukłą kombinację liniową prostszych rezolwent, które może posłużyć do dowodów twierdzeń o generowaniu.

Rozważmy w tym celu domknięty operator  $A$  określony w przestrzeni Banacha  $X$ . Dla funkcjonału liniowego  $\Phi$ , zdefiniowanego na dziedzinie  $A$ , oznaczmy przez  $A_\Phi = A|_{\ker \Phi}$  obcięcie  $A$  do jądra funkcjonału  $\Phi$ , to znaczy

$$A_\Phi f = Af$$

z dziedziną złożoną ze wszystkich elementów  $f$  z dziedziny  $A$ , dla których

$$\Phi f = 0.$$

Zazwyczaj możemy myśleć o operatorze  $A$  jak o operatorze maksymalnym, podczas gdy funkcjonał  $\Phi$  opisuje warunek brzegowy lub warunek transmisji. Ponadto, w konkretnych sytuacjach, funkcjonał  $\Phi$  jest często sumą prostszych funkcjonałów:

$$\Phi = \sum_{\phi \in F} \phi$$

dla pewnego skończonego zbioru funkcjonałów liniowych  $F$ . Udowodnimy, przy niezbyt restrykcyjnym warunku na jądro  $\lambda - A$ , że rezolwenta  $(\lambda - A)^{-1}$  jest wypukłą kombinacją liniową rezolwent pochodzących od funkcjonałów ze zbioru  $F$ .

**Twierdzenie o rozkładzie rezolwenty.** Jeśli  $\lambda$  należy do zbioru rezolwenty operatora  $A_\phi$  dla każdego  $\phi \in F$  oraz funkcjonał  $\Phi$  jest niezerowy na jądrze  $\lambda - A$ , to istnieją liczby  $\alpha_{\lambda, \phi}$  dla  $\phi \in F$ , przy czym  $\sum_{\phi \in F} \alpha_{\lambda, \phi} = 1$  oraz

$$(\lambda - A_\Phi)^{-1} = \sum_{\phi \in F} \alpha_{\lambda, \phi} (\lambda - A_\phi)^{-1}.$$

Z twierdzenia o rozkładzie wyprowadzę kilka abstrakcyjnych wyników o generowaniu półgrup oraz funkcji kosinusowych. Pokażę też, jak można wykorzystać te wyniki do konstrukcji półgrup związanych ze skośnym ruchem Browna na grafie gwiazdowym.

PRZEJŚCIA FAZOWE W EWOLUCYJNYM DYLEMACIE WIĘŹNIA NA  
GRAFACH BARABÁSI-ALBERTY

Jacek Miękiś

Uniwersytet Warszawski

e-mail: miekisz@mimuw.edu.pl

Obecność zachowań altruistycznych w świecie darwinowskim jest jednym z fundamentalnych problemów biologii ewolucyjnej. W populacjach oddziałujących osobników mamy często do czynienia z konfliktem pomiędzy indywidualną racjonalnością, która każe nam zdradzać, a dobrem ogółu, do którego doprowadza zbiorowa kooperacja. Typową ilustracją takiego dylematu społecznego jest gra Dylemat Więźnia, w której jedyną równowagą Nasha jest obopólna zdrada, choć kooperacja obu graczy przyniosłaby im większą wypłatę. W grach przestrzennych osobnicy są rozmieszczonymi w węzłach sieci, grają ze swoimi sąsiadami a ich wypłata jest sumą wypłat z poszczególnych gier. Okazuje się, że ewolucja takiego układu, podczas której gracze imitują zachowania sąsiadów z największą wypłatą doprowadza do stanu stacjonarnego ze współistniejącą kooperacją i zdradą, a nawet do wyeliminowania zachowań niekooperacyjnych na losowych grafach Barabási-Alberty [1].

W naszej prezentacji przedstawimy wyniki symulacji stochastycznych dynamiki imitacji w Dylemacie Więźnia na losowych grafach Erdösa-Rényi i Barabási-Alberty z kosztami utrzymywania połączeń między sąsiadami [2]. Znaleziono zostały stany stacjonarne odpowiednich łańcuchów Markowa. Pokażemy, że w przypadku grafów BA, gdy koszt wzrasta, populacja graczy przechodzi gwałtownie od stanu uporządkowanego, w którym współpracują prawie wszyscy gracze, do stanu, w którym współistnieją kooperanci i zdradzający. W przypadku kosztu krytycznego populacja oscyluje w czasie pomiędzy tymi dwoma stanami. Przypomina to nieciągłe przejście fazowe w ferromagnetycznym modelu Isinga poniżej temperatury krytycznej Curie.

Zaprezentujemy kilka heurystycznych argumentów analitycznych, które uzasadniają istnienie przejścia fazowego w naszym modelu. Porównamy nasz model z kinetycznym modelem Isinga na grafie BA oraz z klasycznym ferromagnetycznym modelem Isinga na sieci kwadratowej, gdzie istnienie przejścia fazowego zostało ściśle wykazane.

Ścisła analiza przejść fazowych w układach niehamiltonowskich, nie posiadających własności równowagi szczegółowej, jest przedmiotem naszych dalszych badań.

**Podziękowania** Zaprezentowane wyniki zostały uzyskane we współpracy z Javadem Mohamadichamgavi w ramach programu European Union's Horizon 2020 research and innovation programme, the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No 955708.

[1] F. C. Santos, J. M. Pacheco, Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation, *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 95, 125–144

[2] J. Miękiś, J. Mochamadichamgavi, J. Łącki, Phase transitions in the Prisoner's Dilemma game on scale-free networks, *BioPhysMath*, 2024, 1

## NIEMARKOWOWSKI MODEL UKŁADU IMMUNOLOGICZNEGO

**Katarzyna Pichór**

Uniwersytet Śląski w Katowicach  
e-mail: katarzyna.pichor@us.edu.pl

**Ryszard Rudnicki**

Instytut Matematyczny PAN  
e-mail: rudnicki@us.edu.pl

Status immunologiczny jest stężeniem specyficznych przeciwciał, które pojawiają się po zakażeniu patogenem i pozostają w surowicy, zapewniając ochronę przed kolejnymi atakami tego samego patogenu. Z czasem liczba przeciwciał maleje aż do następnej infekcji. Podczas walki z chorobą odporność jest wzmocniona, a następnie odporność stopniowo słabnie itd. Gęstości stężeń przeciwciał spełniają równanie różniczkowe cząstkowe z całkowym warunkiem brzegowym. Równanie to generuje półgrupę stochastyczną. Przedstawimy ogólne wyniki dotyczące asymptotycznej stabilności i wymiatania półgrup stochastycznych [1], a następnie zastosujemy je do naszego modelu [2]. Przeanalizujemy również szczególne przypadki tego modelu, np. gdy odporność maleje wykładniczo; przy stałym wzroście przeciwciał po zakażeniu; przy progowym stężeniu przeciwciał przy ponownym zakażeniu; oraz przy infekcjach sezonowych.

[1] K. Pichór, R. Rudnicki, Asymptotic decomposition of substochastic operators and semigroups, *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, 436, 305–321

[2] K. Pichór, R. Rudnicki, Asymptotic properties of a general model of immune status, *SIAM J. Appl. Math.*, 2023, 83, 172–193

## GRANICA OSOBLIWA W MODELU AKTYWNOŚCI BIAŁEK Z RODZINY RHO

**Adam Bobrowski**

Politechnika Lubelska

e-mail: a.bobrowski@pollub.pl

**Anotida Madzvamuse**

The University of British Columbia

e-mail: am823@math.ubc.ca

**Elżbieta Ratajczyk**

Politechnika Lubelska

e-mail: e.ratajczyk@pollub.pl

Białka z rodziny Rho, działając na zasadzie molekularnych przełączników, regulują wiele procesów kluczowych dla życia komórki eukariotycznej. Ich nieaktywne formy występują w cytoplazmie w postaci kompleksu z białkami GDI. Po aktywacji następuje dysocjacja GDI, a wtedy GTP-azy przemieszczają się do błony cytoplazmatycznej, gdzie ulegają zużyciu i dezaktywacji. W naszej pracy badamy układ sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych (bulk-surface PDE) opisujących zmiany stężenia białek Rho wewnątrz komórki i na jej powierzchni. Wnętrze komórki traktujemy jako dwuwymiarowy pierścień, a błonę plazmatyczną jako jej zewnętrzny okrąg.

Pokażemy, że problem Cauchy’ego jest dobrze postawiony w przestrzeni typu  $L^1$  i związany z półgrupą Markowa. Ponadto, równanie wsteczne Kołmogorowa opisuje dynamikę procesu Feller’a. Ponieważ białka poruszają się w cienkiej warstwie, interesuje nas przypadek graniczny, w którym jej grubość dąży do zera. Aby uzyskać twierdzenie o zbieżności rozwiązań równań aproksymujących, zauważamy, że zmniejszanie odległości między powierzchniami tworzącymi brzeg jest równoważne z utrzymaniem tej odległości na stałym poziomie i zwiększaniem prędkości dyfuzji w kierunku do nich prostopadłym. W konsekwencji, odpowiednie przeskalowanie współczynników i znalezienie wspólnej dziedziny pozwala na wyprowadzenie postaci równania granicznego. Okazuje się, że rozwiązania stopniowo tracą zależność od  $r$  (używamy współrzędnych biegunowych) i w granicy można je uważać za funkcje określone na okręgu, a warunki brzegowe opisujące proces aktywacji i dezaktywacji białek, stają się integralną częścią równania podstawowego.

[1] A. Bobrowski, Modeling diffusion in thin 2D layers separated by a semi-permeable membrane, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2020, 52(4), 3222–3251

[2] A. Bobrowski, A. Madzvamuse, E. Ratajczyk, Thin layer approximation for a coupled bulk-surface PDE, , submitted

## SEMI-MARKOWSKIE MODELE POPULACYJNE

**Ryszard Rudnicki**

Instytut Matematyczny PAN

e-mail: rudnicki@us.edu.pl

Pewne ważne zagadnienia biologiczne prowadzą do modeli, które nie spełniają „własności Markowa”. Własność Markowa rozumiana jest tu w szerszym sensie i nie musi dotyczyć tylko procesów stochastycznych. Przykładem są modele biologiczne dotyczące cyklu komórkowego [1] oraz odporności immunologicznej [2]. Są to szczególne przypadki dość ogólnego modelu strukturalnego [3], w którym cechy pojedynczych osobników zmieniają się w czasie zgodnie z pewnym procesem (deterministycznym lub stochastycznym), aż do momentu krytycznego (na przykład: śmierci lub reprodukcji). Odstęp między momentami krytycznymi określony za pomocą zmiennej losowej, której rozkład zależy od początkowego stanu osobnika. Gdy moment krytyczny minie, stan modelu zmienia się zgodnie z pewnym prawem, które zależy od stanu w momencie krytycznym. Niestety, ewolucja czasowa tego modelu nie jest opisana bezpośrednio za pomocą procesu Markowa lub równania różniczkowego. Jednym z głównych zagadnień jest pokazanie, jak zastąpić ten model nowym, który może być badany za pomocą pólgrupe operatorów i jak badać jego asymptotyczne zachowanie. Podamy przykład zastosowania do modelu wzrostu populacji z katastrofami.

[1] K. Pichór, R. Rudnicki, Cell cycle length and long-time behaviour of an age-size model, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2022, 197(1), 125–144

[2] K. Pichór, R. Rudnicki, Asymptotic properties of a general model of immune status, *SIAM J. Appl. Math.*, 2023, 45, 5797–5820

[3] K. Pichór, R. Rudnicki, Long-time behaviour of a generalized semi-Markov model of population dynamics, *oddana do czasopisma*,

BIOLOGICZNE ZASTOSOWANIA LOSOWO PRZEŁĄCZAJĄCYCH SIĘ  
RÓWNAŃ EWOLUCYJNYCH

**Andrzej Tomski**

Uniwersytet Śląski w Katowicach  
e-mail: `andrzej.tomski@us.edu.pl`

Wystąpienie dotyczyć będzie charakterystyki asymptotyki długoczasowej losowo przełączających się [1] układów równań ewolucyjnych w przestrzeni  $L^1$  [2] z przykładami ostatnio badanych zastosowań w biomatematyce, w tym modelu przebiegu procesu oddychania u owadów [3] i jego modyfikacji.

[1] Davis M.H.A, Piecewise-deterministic Markov processes: a general class of non-diffusion stochastic models, *J R Stat Soc Ser B (Methodol)*, 1984, 46(3):353–376

[2] Klimasara P, Mackey MC, Tomski A, Tyran-Kamińska M, Randomly switching evolution equations., *Nonlinear Anal Hybrid Syst*, 2021, 39:100948

[3] Lawley S, Nijhout H.F, Reed M.C, Spiracular fluttering decouples oxygen uptake and water loss: a stochastic PDE model of respiratory water loss in insects, *J Math Biol*, 2022, 84(6):40

DWUSKALOWY CZĄSTECZKOWY STOCHASTYCZNY MODEL  
REAKCJI-DYFUZJI

**Radosław Wieczorek**

Uniwersytet Śląski w Katowicach

e-mail: [radoslaw.wieczorek@us.edu.pl](mailto:radoslaw.wieczorek@us.edu.pl)

Stochastyczne modele cząsteczkowe są częstym narzędziem badawczym w wielu dziedzinach współczesnej nauki, zwłaszcza biologii i chemii. Interesującym zagadnieniem zarówno matematycznie, jak i z punktu widzenia zastosowań, jest zbieżność takich procesów przy dużej liczbie cząstek do różnych opisów makroskopowych.

W referacie opowiem o indywidualnych modelach reakcji-dyfuzji, w których występują dwa typy cząstek: jedne są na tyle liczne, że można stosować do nich przybliżenie makroskopowe, a drugie na tyle nieliczne, że warto opisywać je modelem cząsteczkowym. Prowadzi to do modeli zwanych hybrydowymi, w których stochastyczne modele cząsteczkowe sprzężone są z równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Przedstawię konstrukcję takich modeli oraz pokażę różne możliwe przejścia graniczne pomiędzy tego typu modelami.

[1] V. Capasso, R. Wieczorek, A hybrid stochastic model of retinal angiogenesis, *Mathematical Methods in the Applied Science*, 2020, **43**, no. 18, 10578–10592.

[2] R. Wieczorek, Hydrodynamic limit of a stochastic model of proliferating cells with chemotaxis, *Kinetic and Related Models*, 2023, **16**, 373–393.

[3] R. Wieczorek, Multiscale reaction-diffusion stochastic particle models, *in preparation*, 2024.





# Geometria i topologia rozmaitości wraz z teorią węzłów

ORGANIZATORZY:

KRZYSZTOF PAWAŁOWSKI (UAM), JÓZEF PRZYTYCKI (UGW), ROBERT WOLAK (UJ)

KLASY HOMOTOPII ODWZOROWAŃ PRZESTRZENI THOMA WIĄZEK  
WEKTOROWYCH

**Agnieszka Bojanowska**  
Uniwersytet Warszawski  
e-mail: aboj@mimuw.edu.pl

Jednym z podstawowych zagadnień topologii jest klasyfikacja odwzorowań między przestrzeniami z dokładnością do homotopii. Klasyczne twierdzenie Brouwera mówi, że klasa homotopii przekształcenia sfery w siebie jest wyznaczona przez jego stopień. Lew Pontriagin uogólnił ten wynik podając geometryczną interpretację klas homotopii przekształceń z dowolnej zwartej rozmaitości bez brzegu w sferę wprowadzając pojęcie obramowanego kobordyzmu podrozmaitości. Podrozmaitość jest obramowana, jeżeli podana jest trywializacja jej wiązki normalnej, zaś obramowany kobordyzm jest geometrycznie zdefiniowaną relacją równoważności obramowanych podrozmaitości. Pontriagin wykazał bijekcję między klasami obramowanego kobordyzmu podrozmaitości danej rozmaitości a klasami homotopii odwzorowań tej rozmaitości w sferę. Praca Pontriagina stała się punktem wyjścia dla prac Thoma, Atiyah, Bröckera, tom Diecka i Quillena odkrywających związki między geometrią rozmaitości a teorią homotopii. Jeżeli popatrzymy na sferę  $S^n$  jako na przestrzeni Thoma  $n$  – wymiarowej wiązki nad punktem otrzymamy uogólnienie wyniku Pontriagina. Dla dowolnej wiązki wektorowej  $p : E \rightarrow B$  możemy skonstruować jej przestrzeń Thoma  $\text{Th}(E)$ , która gdy  $B$  jest przestrzenią zwartą jest po prostu jednopunktowym uzwarceniem przestrzeni  $E$ . Niech teraz  $p : E \rightarrow B$  będzie wiązką wektorową nad kompleksem komórkowym. Bröcker i Tom Dieck podali geometryczną interpretację punktowanych klas homotopii  $[S^{n+k}, \text{Th}(E)]_*$  w terminach kobordyzmu zwartych podrozmaitości  $n$  – wymiarowych przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^{n+k}$  z odpowiednio zdefiniowaną strukturą na wiązce normalnej wyznaczoną przez wiązkę  $p : E \rightarrow B$ . Przedstawię najdalej idące uogólnienie tego twierdzenia zastępując sferę  $S^{n+k}$  przestrzenią Thoma gładkiej wiązki  $p' : E' \rightarrow Y$  nad rozmaitością  $Y$ . Zdefiniuję klasy kobordyzmu podrozmaitości właściwych rozmaitości  $E'$  ze strukturą na wiązce normalnej wyznaczoną przez wiązkę  $p : E \rightarrow B$ . Okazuje się, że te klasy kobordyzmu są w bijekcji z punktowanymi klasami homotopii  $[\text{Th}(E'), \text{Th}(E)]_*$ . Przedstawię wnioski, które wynikają z powyższego twierdzenia. Jest to wspólna praca ze Stefanem Jackowskim.

KLASYFIKACJA STRUKTUR ZESPOLONYCH NA NISKOWYMIAROWYCH  
ALGEBRACH LIEGO I JEJ ZASTOSOWANIA.

**Andrzej Czarnecki**  
Uniwersytet Jagielloński  
e-mail: [andrzejczarnecki01@gmail.com](mailto:andrzejczarnecki01@gmail.com)

W referacie przedstawię klasyfikację całkowalnych struktur prawie zespolonych na rzeczywistych algebrach Liego niskich wymiarów. W połączeniu z wynikami w pracy [1] oznacza ona, że problem uogólnienia struktur Sasakiego, rozumianych jako szczególne działanie jednowymiarowej grupy  $\mathbb{R}$  na rozmaitości gładkiej, na działania grup trójwymiarowych redukuje się kanonicznie z powrotem do przypadku działań jednowymiarowych. Pokażę, że nie dzieje się tak w przypadku uogólnień na działania grup pięciowymiarowych.

[1] A. Czarnecki, M. Sroka, R. Wolak, On normality of f.pk-structures on g-manifolds, *preprint*, arXiv:1609.08601

O KRZYWEJ ŁAŃCUCHOWEJ NAD OKRĘGIEM

**Maciej Czarnecki**

Uniwersytet Łódzki

e-mail: [maciej.czarnecki@wmii.uni.lodz.pl](mailto:maciej.czarnecki@wmii.uni.lodz.pl)

Uogólnimy klasyczny problem kształtu linii utworzonej przez jednorodny swobodnie zawieszony łańcuch nad prostą na płaszczyźnie do sytuacji, której krzywą odniesienia będzie okrąg.

Praca wspólna z Rafaelem Lópezem Camino (Granada).

## KORESPONDENCJA WĘZEL-KOŁCZAN

**Piotr Kucharski**

Uniwersytet Warszawski, Instytut Matematyki

e-mail: piotr.kucharski@mimuw.edu.pl

W mojej prezentacji opowiem o zaskakującej relacji, która łączy wielomiany HOMFLY-PT z teorią reprezentacji kołczanów symetrycznych i niezmiennikami Donaldsona-Thomasa, bazując na wskazówkach płynących z teorii strun.

## NIEROZWIĄZALNE GRUPY BIEBERBACHA

**Rafał Lutowski**

Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański,  
Wita Stwosza 57, 80-308 Gdańsk  
e-mail: rafal.lutowski@ug.edu.pl

**Andrzej Szczepański**

Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański,  
Wita Stwosza 57, 80-308 Gdańsk  
e-mail: andrzej.szczepanski@ug.edu.pl

Zamknięte rozmaitości Riemanna z krzywizną sekcijną równą zero (płaskie rozmaitości) są przestrzeniami asferycznymi. Badanie ich grup podstawowych – grup Bieberbacha – jest zatem doskonałym narzędziem badania ich samych. Z drugiej strony, grupy Bieberbacha są obiektem zainteresowania również z algebraicznego punktu widzenia. Referat będzie poświęcony zagadnieniu rozwiązalności grup Bieberbacha, które jest związane z szerszym zagadnieniem minimalności – w sensie długości Hirscha – beztorsyjnych i rozwiązalnych grup wirtualnie policyklicznych. W szczególności pokażemy, że do wymiaru 15 nie istnieje płaska rozmaitość, której grupa podstawowa nie jest rozwiązalna.

KLASYFIKACJA KLAS HOMOTOPII DYFFEOMORFIZMÓW  
MORSE'A-SMALE'A ZWARTYCH POWIERZCHNI

Wacław Marzantowicz

Afilacja

e-mail: marzan@amu.edu.pl

Opowiemy o ostatnio uzyskanych wynikach. Referat będzie oparty na wspólnej pracy z G. Graffem, Ł.P. Michalakiem i A. Myszkowskim.

Odwzorowanie  $f: M \rightarrow M$  zwartej rozmaitości  $M$  wyznacza ciąg  $\{l_n = L(f^n)\}$ , liczb Lefschetza ich iteracji. Rozpatrujemy ciąg dualny  $\{a_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$  dany poprzez formułę odwracania Möbiusa. Zbiór  $\mathcal{A}(f) = \{n : a_n(f) \neq 0\}$  nazywany jest zbiorem okresów algebraicznych. Pokazujemy (rozwiązując otwarty problem postawiony w literaturze), że dla każdego skończonego zbioru  $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$  liczb naturalnych istnieje zorientowana powierzchnia  $S_g$ , lub odpowiednio nieorientowalna  $N_g$ , genusu  $g$  i dyffeomorfizm Morse'a-Smale'a  $f$  tej powierzchni, taki, że  $\mathcal{A}(f) = \mathcal{A}$ , co dla tej klasy odwzorowań implikuje istnienie punktów o minimalnym okresie  $n \in \mathcal{A}$ , gdy  $n$  jest nieparzyste. Nasza metoda pozwala na badanie klas homotopii dyffeomorfizmów Morse'a-Smale'a lub równoważnie klas odwzorowań, które są "algebraicznie skończonego typu" według klasyfikacji Nielsena-Thurstona. Daje to oszacowanie liczby tych klas w zależności od  $g$ , które jest wykładnicze ze względu na  $g$ .

[1] G. Graff, W. Marzantowicz, Ł. P. Michalak, A. Myszkowski, Every finite set of natural numbers is realizable as the algebraic periods of a Morse-Smale diffeomorphism, *preprint*,

MINIMALNE TRIANGULACJE PRZESTRZENI O ZADANEJ GRUPIE  
PODSTAWOWEJ

**Łukasz Patryk Michalak**

Institute of Mathematics, Physics and Mechanics, Ljubljana;

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

e-mail: lukasz.michalak@amu.edu.pl

W trakcie referatu opowiem o problemie określenia minimalnej liczby wierzchołków potrzebnych do utworzenia kompleksu sympleksyjnego o zadanej grupie podstawowej. Przedstawię pewne wyniki asymptotyczne oraz omówię sposób, w jaki można sklasyfikować przy pomocy komputera grupy podstawowe kompleksów o *małej* liczbie wierzchołków. Wśród pojawiających się ciekawych przykładów można wymienić grupy Baumslaga–Solitara  $BS(n, k)$  oraz grupy węzłów torycznych. W szczególności okazuje się, że typ pokryciowy (*covering type*) dopełnienia trójlistnika jest równy 8. Główną motywacją do podjęcia tych badań jest pytanie o minimalną triangulację sfery Poincarégo.

Projekt jest realizowany wspólnie z D. Govcem, W. Marzantowiczem i P. Pavešićem.



NIEZNIKANIE KOHOMOLOGII GRUPY  $SL_n(\mathbb{Z})$ **Piotr Mizerka**

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: pmizerka@impan.pl

Niedawno zostało pokazane przez Badera i Sauera [1], że  $H^k(SL_n(\mathbb{Z}); \pi) = 0$  dla  $k \leq n - 2$  oraz  $\pi$  będącej ortogonalną reprezentacją bez niezerowych wektorów niezmienniczych. W tym odczycie skupimy się na opisaniu przeciwnego wyniku. Dla  $n = 3$  oraz  $n = 4$  wskażemy konkretne ortogonalne reprezentacje  $\pi$  grupy  $SL_n(\mathbb{Z})$ , które nie posiadają niezerowych wektorów niezmienniczych, ale dla których  $H^{n-1}(SL_n(\mathbb{Z}); \pi) \neq 0$ . Dowodzi to, że rezultat Badera i Sauera jest ostry dla tych przypadków.

W celu pokazania naszego wyniku, zastosujemy izomorfizm w stylu Poincaré pomiędzy kohomologiami i homologiami grupowymi w dopełniających się wymiarach i zredukujemy problem do obliczania pewnych homologii  $SL_n(\mathbb{Z})$  pochodzących z dekompozycji zadanej przez komórki Voronoi'a. Okazuje się, że takie przeliczenie da się przetłumaczyć na własności odpowiedniego Laplasjanu zadanego przez badaną reprezentację – jego singularność jest warunkiem wystarczającym nieznikania (ko)homologii.

Jest to wspólny projekt z B. Brückiem (Universität Münster), S. Hughesem i D. Kielakiem (University of Oxford).

[1] U. Bader, R. Sauer, Higher Kazhdan property and unitary cohomology of arithmetic groups, *preprint*, ArXiv: 2308.06517

## LICZBA SKRZYŻOWAŃ HOPFA I JEJ ZWIĄZKI Z INNYMI NIEZMIENNIKAMI SPLOTÓW

Maciej Mroczkowski

Uniwersytet Gdański

e-mail: maciej.mroczkowski@mat.ug.edu.pl

W [9] Turaev wprowadził pojęcie *gleams*, dzięki którym węzły czy sploty w  $S^3$  mogą być zakodowane za pomocą zanurzonych krzywych w  $S^2$ , z obszarami dekorowanymi przez liczby całkowite. Blisko związane pojęcie *diagramów strzałkowych* zostało wprowadzone w [4]. Oba pojęcia opierają się na rzutowaniach splotów w  $S^3$  na  $S^2$  przez rzutowanie Hopfa. Kilka prac z lat 90-tych ubiegłego wieku dotyczyło *gleams* [1,3].

Minimalna ilość skrzyżowań dla danego splotu  $L$  przy takim rzutowaniu, nazywana *liczbą skrzyżowań Hopfa*, lub  $h(L)$ , jest niezmiennikiem którego definicja była wspomniana w [2]. Po 30 latach ten niezmiennik został na nowo rozważony w [5,6,7,8].

W referacie przedstawimy związki pomiędzy niezmiennikiem  $h$  oraz innymi niezmiennikami splotów, takich jak torusowa liczba mostowa  $b_1$ ,  $h$ -genus czy liczba 3-kolorowań. Przedstawimy różne wyniki dotyczące obliczania czy oszacowania  $h$  dla konkretnych węzłów lub rodzin węzłów.

[1] U. Burri, For a fixed Turaev shadow Jones-Vassiliev invariants depend polynomially on the gleams, *Comment. Math. Helv.*, 1997, 72, 110–127

[2] T. Fiedler, Algebraic links and the Hopf Fibration, *Topology*, 1991, 30, 259–265

[3] M. N. Goussarov, Interdependent modifications of links and invariants of finite degree, *Topology*, 1998, 37, 3

[4] M. Mroczkowski, M. Dabkowski, KBSM of the product of a disk with two holes and  $S^1$ , *Topology and its Applications*, 2009, 156, 1831–1849

[5] M. Mroczkowski, Knots with Hopf crossing number at most one, *Osaka J. Math.*, 2020, 57(2), 279–304

[6] M. Mroczkowski, On some moves on links and the Hopf crossing number, *Mediterr. J. Math.*, 2021, 18, 7

[7] M. Mroczkowski, On two crossing numbers of algebraic knots under Hopf fibration, *Topology and its Applications*, 2022, 108084

[8] M. Mroczkowski, Infinitely many roots of unity are zeros of some Jones polynomials, *Geom. Dedicata*, 2022, no. 4, Paper No. 43

[9] V. G. Turaev, Shadow links and face models of statistical mechanics, *J. Differential Geom.*, 1992, 36, 1, 35–74

TWIERDZENIA LOKALIZACYJNE DLA HOMOLOGII  
KHOVANOVA-ROZANSKY'EGO

Wojciech Politarczyk

MIMUW

e-mail: wpolitarczyk@mimuw.edu.pl

Niech  $L$  będzie  $m$ -periodycznym splotem w  $\mathbb{R}^3$  lub w pełnym torusie, tj.  $L$  jest niezmienniczy ze względu na pewien obrót stopnia  $n$  zewnętrznej rozmaitości. Dla takich splotów można zdefiniować  $\mathbb{Z}/n$ -ekwiwariantną wersję  $\mathfrak{gl}(N)$ -kohomologii Khovanova-Rozansky'ego (w skrócie kohomologii KhR), dla  $N \geq 2$ . Ekwiwariantne kohomologie KhR są algebraicznym odpowiednikiem kohomologii Borela – jednego z podstawowych narzędzi ekwiwariantnej topologii algebraicznej.

W klasycznym przypadku zachodzi twierdzenie lokalizacyjne Quillena dla kohomologii Borela, które opisuje bardzo ciekawe związki pomiędzy kohomologiami przestrzeni z działaniem grupy cyklicznej rzędu pierwszego a przestrzenią punktów stałych. W szczególności, klasyczne nierówności Smitha pomiędzy wymiarami kohomologii przestrzeni z symetriami a przestrzenią punktów stałych wynikają z twierdzenia lokalizacyjnego.

W przypadku splotów z symetriami naturalnym wydaje się pytanie, czy zachodzi jakiś odpowiednik twierdzenia lokalizacyjnego Quillena dla ekwiwariantnej wersji kohomologii KhR. Wiadomo [1], [2], że dla  $N = 2$ , tj. w przypadku kohomologii Khovanova, zachodzi odpowiednik twierdzenia lokalizacyjnego, który porównuje kohomologie splotu periodycznego z kohomologiami splotu ilorazowego.

Celem referatu będzie przedstawienie głównych idei dowodu twierdzenia lokalizacyjnego dla  $\mathfrak{gl}(N)$ -kohomologii KhR, dla dowolnego  $N \geq 2$ .

Wyniki omówione w referacie są rezultatami uzyskanymi we współpracy z Krzysztofem Putyrą z Uniwersytetu w Zurychu.

[1] M. Borodzik, W. Politarczyk, M. Silvero, Khovanov homotopy type, periodic links and localizations, *Mathematische Annalen*, 2021, 380, 1233–1309

[2] M. Stoffregen, M. Zhang, Localization in Khovanov homology, *preprint*, arXiv:1810.04769

## 40 LAT WIELOMANU HOMFLYPT

**Józef H. Przytycki**

George Washington University

e-mail: przytyck@gwu.edu

W lipcu 1984 roku brałem udział w konferencji w Durham, a nawet wygłosiłem krótki odczyt “*W poszukiwaniu rozmaitości hiperbolicznej o najmniejszej objętości*”. Na tej konferencji Hugh Morton, czołowy teoriowezłowiec tamtego okresu, popularyzował list otwary, jaki 30 maja wysłał Vaughan Jones do Joan Birman, opisując swój nowy, wielomianowy niezmiennik splotów otrzymany poprzez ślad pewnych algebr Von Neumanna. Na wykładzie opowiem o drodze, jaką przeszedłem wspólnie z Pawłem Traczykiem, od tego listu Jonesa do wielomianu HOMFLYPT, uogólniającego zarówno wielomian Jonesa jak i starszy od niego wielomian Alexandra. Zakończę krótkim omówieniem ogólnej teorii *skein* modułów (z kwietnia 1987 roku), które są naturalnym uogólnieniem (do dowolnej rozmaitości 3-wymiarowej) niezmienników splotów w sferze 3-wymiarowej.

[1] Józef H. Przytycki, Paweł Traczyk, Invariants of links of Conway type, *Kobe J. Math*, 1987, 4, 115–139

[2] J. Smith, Some preprint title, *preprint*, ArXiv:2301.012345

[3] Józef H. Przytycki, Rhea Palak Bakshi, Dionne Ibarra, Gabriel Montoya-Vega, Deborah Weeks, Lectures in Knot Theory; An Exploration of Contemporary Topics, *Springer Universitext*, 2024

CIĄG SPEKTRALNY DLA REGULARNYCH IZOMETRYCZNYCH DZIAŁAŃ  
GRUP LIEGO**Paweł Raźny**Uniwersytet Jagielloński, Instytut Matematyki,  
ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 6, 30-348, Kraków.  
e-mail: pawel.razny@uj.edu.pl

Podczas referatu omówimy nowe wyniki odnośnie ciągu spektralnego dla izometrycznych działań grup Liego stanowiące dalsze uogólnienia i zastosowania ciągu spektralnego przedstawionego w [1]. Wśród nich zaprezentujemy częściowe wyniki dla działań regularnych (tzn. o stałym wymiarze orbit) pozwalające nam w pewnych szczególnych przypadkach przedstawić jego drugą stronę jako iloczyn tensorowy kohomologii bazowych i odpowiednich kohomologii wynikających z relatywnego kompleksu pary algebr Liego (analogicznie jak w przypadku ciągu spektralnego Serre'a). Również przez analogie z ciągiem spektralnym Serre'a przedstawimy zastosowanie tego ciągu w celu uzyskania analogu długiego ciągu dokładnego Gysina przedstawionego w [2]. Na koniec omówimy możliwość zastosowania rzeczywistych rozdmuchań w celu poszerzenia tych wyników na przypadek nieregularny. Pozwoli nam to też zastosować nasz ciąg spektralny do wyliczania ilości punktów stałych odpowiednich działań grup Liego.

[1] P. Raźny, A Spectral Sequence for Locally Free Isometric Lie Group Actions., *Transformation Groups*, <https://doi.org/10.1007/s00031-024-09855-2>.

[2] J.I. Royo Prieto, M. Saralegui-Aranguren, The Gysin sequence for  $\mathbb{S}^3$ -actions on manifolds., *Publ. Math-Debrecen*, 2013, 83(3), 275–289.

## WĘZŁY, KOŁCZANY I KOMBINATORYKA ŚCIEŻEK

**Piotr Sułkowski**

Faculty of Physics, University of Warsaw

e-mail: [psulkows@fuw.edu.pl](mailto:psulkows@fuw.edu.pl)

Teoria strun przewiduje intrygujące związki pomiędzy teorią węzłów oraz teorią reprezentacji kołczanów, określane jako korespondencja węzłowo-kołczanowa [1]. W niniejszym referacie przedstawię jak ta korespondencja związana jest z jeszcze innym kierunkiem badawczym, mianowicie kombinatoryką ścieżek [2,3]. W szczególności wyjaśnię, jak kolorowe wielomiany HOMFLY-PT dla węzłów torycznych można wyrazić poprzez zliczanie uogólnionych ścieżek Schrödera. Intrygujące związki między węzłami, kołczanami oraz kombinatoryką ścieżek sugerują istnienie głębszej perspektywy, którą zwięźle nakreślę.

[1] Piotr Kucharski, Markus Reineke, Marko Stosic, Piotr Sułkowski, Knots-quivers correspondence, *Adv. Theor. Math. Phys.*, 23, 7 (2019) 1849-1902

[2] Miłosz Panfil, Marko Stosic, Piotr Sułkowski, Donaldson-Thomas invariants, torus knots, and lattice paths, *Phys. Rev. D*, 98 (2018) 026022

[3] Marko Stosic, Piotr Sułkowski, Torus knots and generalized Schröder paths, *preprint*, ArXiv:2405.10161

SFERY BEZ DZIAŁAŃ GŁADKICH Z DOKŁADNIE JEDNYM PUNKTEM  
STAŁYM

**Kamil Śmietaniak**

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

e-mail: [kamil.smietaniak@amu.edu.pl](mailto:kamil.smietaniak@amu.edu.pl)

Dla grupy skończonej  $G$  następujące trzy warunki są równoważne:

1. nie istnieje ciąg grup postaci  $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ , taki że  $P$  jest  $p$ -grupą, taką że  $H/P$  jest grupą cykliczną, a  $H$  jest podgrupą normalną taką, że  $G/H$  jest  $q$ -grupą,
2. istnieje gładkie, efektywne działanie grupy  $G$  na dysku  $D^m$  bez punktów stałych,
3. istnieje gładkie, efektywne działanie grupy  $G$  na sferze  $S^k$  z dokładnie jednym punktem stałym,

gdzie  $m$  oraz  $k$  nie koniecznie są równe. Jeśli istnieje działanie gładkie grupy  $G$  na sferze z dokładnie jednym punktem stałym to korzystając z tak zwanego *Slice Theorem* otrzymujemy gładkie działanie na dysku o tym samym wymiarze, które jest dodatkowo liniowe na brzegu. Mając natomiast gładkie działanie na dysku bez punktów stałych, możemy skonstruować działanie na sferze o tym samym wymiarze z dokładnie jednym punktem stałym poprzez ściągnięcie brzegu do punktu, które jednak nie musi być gładkie. Co więcej, gdy dla grupy  $G$  mamy gładkie, efektywne działanie bez punktów stałych na dysku o wymiarze  $n$ , to dla dowolnego dodatniego  $k$  otrzymamy również takie działanie na dysku  $n + k$  wymiarowym poprzez iloczyn kartezjański dysku  $n$  wymiarowego z żądanym działaniem oraz dowolnego dysku w  $k$  wymiarowej  $G$ -reprezentacji. W przypadku działań na sferach E. Stein [5] skonstruował gładkie działanie grupy  $SL(2, 5)$  na sferze 7-wymiarowej z jednym punktem stałym, natomiast A. Borowiecka [1], wykazała, że nie istnieje takie działanie na sferze 8-wymiarowej.

Przedstawione zostaną metody pozwalające na wyznaczenie wszystkich wartości  $n$  takich, że  $S^n$  posiada gładkie, efektywne działanie  $G$ , z dokładnie jednym punktem stałym, gdzie  $G$  należy do pewnej rodziny grup, będących rozszerzeniami grupy  $A_5$ [2,3]. Użyte techniki można podzielić na dwie kategorie: konstrukcja danych działań w danych wymiarach, oraz wykluczanie takich działań. W pierwszym przypadku podany zostanie warunek wystarczający na istnienie  $G$ -działania w terminach  $G$ -reprezentacji, dla ustalonej grupy  $G$ . Dla wykluczania działań należy rozpatrzyć wszystkie  $G$ -reprezentacje o zadanym wymiarze i pokazać, że nie istnieje taka  $G$ -reprezentacja, która mogłaby wystąpić jako reprezentacja w przestrzeni stycznej do punktu stałego. W tym celu używane są różne techniki, oparte na wynikach uzyskanych między innymi w [4], które zostaną zaprezentowane.

[1] A. Borowiecka, *SL(2, 5) has no smooth effective one-fixed-point action on  $S^8$* , *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 2016, 64, 85–94

[2] M. Morimoto, *Construction of one-fixed-point actions on spheres of nonsolvable groups II*, *J. Math. Soc. Japan, Article in Press*, 2023, <https://www.mathsoc.jp/publication/JMSJ/inpress.html>

[3] M. Morimoto, K. Śmietaniak, *Construction of one-fixed-point actions on spheres of nonsolvable groups III*, preprint, 2024

[4] P. Mizerka, *Exclusions of smooth actions on spheres of the non-split extension of  $C_2$  by  $SL(2, 5)$* , *Osaka J. Math.*, 2023, 60, 1–14

[5] E. Stein, *Surgery on products with finite fundamental group*, *Topology*, 1977, 16, 473–493

NIEŚCIAĞALNA PRZESTRZEŃ, KTÓRA JEST WSTĘPUJĄCĄ SUMĄ  
ŚCIAĞALNYCH OTWARTYCH PODPRZESTRZENI

Andreas Zastrow

Uniwersytet Gdański

e-mail: andreas.zastrow@ug.edu.edu

Pytanie, czy taka przestrzeń z normalną topologią istnieje, było zadawane w 2016 r. w pracy Ancela i Edwardsa [2]. Zostało przesłane do autora przez Umeda Karimova, który jednocześnie rozszerzał to pytanie na przestrzenie z dowolną topologią. Referat będzie wyjaśniać, jak skonstruować taką przestrzeń, która ma lokalnie skończoną tylko- $T_0$  topologię.

Przestrzenie topologiczne z (lokalnie) skończoną tylko- $T_0$  topologią stały się obecnie też dyskutowane pod hasłem “topologia asymetryczna”. Są one znane co najmniej od publikacji Alexandroffa z lat trzydziestych ([1]). Zwykle podejście do takich przestrzeni jest albo z punktu widzenia Alexandroffa (tzn., przez relację tych topologii z częściowo uporządkowanych zbiorów), lub składają się z innych abstrakcyjnych metod porównywania kategorii. Wygląda na to, że pierwszą pracą, która dołączyła metody badań z geometrycznej topologii do badania takich przestrzeni, była praca Brazasa i Matosa z 2019 roku ([3]), w której skonstruowano lokalnie przeliczalną tylko- $T_0$  przestrzeń, która naśladuje cechy Przestrzeni Kolczyków (która od około 40 lat była nazywana “Kolczyków Hawajskich”). Referat będzie korzystał z idei pochodzących z topologii geometrycznej, razem z cechami, które tylko lokalnie skończone przestrzenie mogą posiadać, aby pokazać, że przestrzeń z własnościami jak opisane w tytule może być skonstruowana.

[1] P. Alexandroff, Diskrete Räume, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 1937, 2(44) no.3, 501–519

[2] F. D. Ancel, R. D. Edwards, Is a monotone union of contractible open sets contractible?, *Topology Appl.*, 2016, 214, 89–93

[3] J. Brazas, L. Matos, A countable space with an uncountable fundamental group, *Involve*, 2019, 12 no.3, 381–394



# Matematyczne zagadnienia we współczesnej analizie danych

ORGANIZATORZY:

MAŁGORZATA BOGDAN (UWR)

REDUKCJA WYMIARU MODELI PROBABILISTYCZNYCH ZA POMOCĄ  
TECHNIK REGULARYZACYJNYCH

**Malgorzata Bogdan**

Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

e-mail: malgorzata.bogdan@uwr.edu.pl

Omówimy problem dopasowania modelu statystycznego do danych których wymiar jest porównywalny lub większy niż liczba obserwacji. W tej sytuacji często stosuje się techniki regularyzacyjne, które stabilizują własności dopasowywanych modeli. W przypadku gdy funkcje regularyzacyjne są nieróżniczkowalne, techniki te w naturalny sposób redukują wymiar dopasowywanych modeli. W czasie wykładu wyjaśnimy zasadę działania takich technik i zaprezentujemy szereg wyników teoretycznych i empirycznych, ilustrujących własności uzyskanych w ten sposób estymatorów.

FAKTÓW JEST MNIEJ NIŻ SŁÓW:  
PRAWA POTĘGOWE DLA PROCESÓW STACJONARNYCH

**Łukasz Dębowski**

Instytut Podstaw Informatyki PAN

e-mail: ldebowsk@ipipan.waw.pl

W eksperymentach obliczeniowych w statystycznym modelowaniu języka naturalnego obserwuje się wielkoskalowe ogony potęgowe krzywych uczenia [5, 7, 8, 9]. Różnica między intensywnością entropii krzyżowej modelu statystycznego a intensywnością entropii języka maleje jak potęga ilości danych uczących. Obserwacja ta jest równoważna wzrostowi potęgowej informacji wzajemnej między rosnącymi blokami tekstu — pierwsza wzmianka tej prawidłowości pochodzi z pracy [6], por. [1]. Wzrost potęgowy występuje w przypadku języków tak różnorodnych jak angielski, francuski, rosyjski, chiński, koreański i japoński. Co więcej, obserwuje się niezależną od języka wartość wykładnika: informacja wzajemna między dwoma blokami długości  $n$  jest proporcjonalna do  $n^{0,8}$  [8, 9].

Anonsujemy matematyczną teorię tego zjawiska, którą rozwijamy od pewnego czasu. Większość wyników badań podsumowaliśmy w monografii [3] i artykułach [2, 4]. Centralnym elementem teorii krzywych uczenia o zaniku potęgowym jest twierdzenie postaci:

*Liczba niezależnych faktów opisanych w skończonym tekście jest w przybliżeniu mniejsza niż liczba różnych słów użytych w tym tekście.*

Tego rodzaju stwierdzenie nazywamy twierdzeniem o faktach i słowach. Twierdzenie o faktach i słowach jest wynikiem, który dotyczy dowolnego dyskretnego procesu stacjonarnego i wiąże dekompozycję ergodyczną z semantyką i statystyką.

Wynik ten wydaje się paradoksalny, gdyż można by sądzić, że łącząc słowa, daje się wyrazić znacząco więcej niezależnych faktów. Twierdzenie to jednak łatwo jest udowodnić, przyjmując dość naturalne definicje faktów i słów. Idee są następujące:

**Preliminaria:** Rozpatrujemy dyskretny proces stacjonarny  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Bloki zmiennych losowych oznaczamy  $X_j^k := (X_j, X_{j+1}, \dots, X_k)$ . Entropia Shannona zmiennej dyskretnej  $X$  to  $H(X) := \mathbf{E} [-\log P(X)]$ , gdzie  $\mathbf{E} Y$  to wartość oczekiwana  $Y$ . Istnieje granica nazywana intensywnością entropii  $h := \lim_{n \rightarrow \infty} H(X_1^n)/n$ . Efekty potęgowe opisuje wykładnik

Hilberga  $\text{hilb}_{n \rightarrow \infty} S(n) := \left[ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log S(n)}{\log n} \right]_+$ . Na przykład wykładnik redundancji to

$$\beta := \text{hilb}_{n \rightarrow \infty} [H(X_1^n) - hn]. \quad (1)$$

Warunek  $\beta > 0$  nazywamy prawem Hilberga, na cześć autora pracy [6].

**Fakty i wykładnik redundancji:** Proces stacjonarny  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  o bezatomowym  $\sigma$ -ciale niezmienniczym nazywamy mocno nieergodycznym. W tym przypadku, niech  $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  będzie procesem Bernoulli( $\frac{1}{2}$ ) mierzalnym względem tego  $\sigma$ -ciała niezmienniczego. Zmienne  $Z_k$  nazywamy faktami, bo nie zależą od czasu. Mówimy, że skończony tekst  $x_1^n$  opisuje  $l$  początkowych faktów według funkcji  $g$ , jeżeli  $l+1 = U_g(x_1^n) := \min \{k \in \mathbb{N} : g(k, x_1^n) \neq Z_k\}$ . Dla mocno nieergodycznego procesu  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  i dowolnej funkcji  $g$ , zachodzi dolne ograniczenie wykładnika redundancji przez liczbę opisanych faktów

$$\text{hilb}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} U_g(X_1^n) \leq \beta. \quad (2)$$

**Proces Santa Fe:** Pojęcie faktów warto zilustrować prostym przykładem mocno nieergodycznego procesu nazwanego procesem Santa Fe [2]. Niech  $(K_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  będzie procesem IID o wartościach w liczbach naturalnych i rozkładzie Zipfa  $P(K_i = k) \sim k^{-\alpha}$ , gdzie  $\alpha > 1$ . Niech proces  $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  będzie Bernoulli( $\frac{1}{2}$ ). *Proces Santa Fe*  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  to ciąg par

$$X_i = (K_i, Z_{K_i}). \quad (3)$$

Proces Santa Fe jest uproszczonym modelem tekstu, który składa się z losowych stwierdzeń postaci „ $k$ -ty fakt ma wartość  $Z_k$ ”. Stwierdzenia te są *niesprzeczne*. To znaczy, jeżeli stwierdzenia  $X_i$  oraz  $X_j$  opisują ten sam fakt ( $K_i = K_j$ ), to przypisują mu tę samą wartość ( $Z_{K_i} = Z_{K_j}$ ). Kładąc  $g(k, x_1^n) := z$ , jeśli  $(k, z) \in x_1^n$  i  $(k, 1 - z) \notin x_1^n$ , oraz  $g(k, x_1^n) := 2$  dla innych  $(k, x_1^n)$ , otrzymujemy prawo potęgowe  $\text{hilb}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} U_g(X_1^n) = 1/\alpha \in (0, 1)$ .

**Słowa i informacja wzajemna:** Rozpatrujemy procesy stacjonarne  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  nad alfabetem  $D$ -arnym. *Maksimum wiarogodności* (ML) w klasie procesów Markowa to

$$\hat{\mathbb{P}}(k|x_1^n) := \max_Q \prod_{i=k+1}^n Q(x_i|x_{i-k}^{i-1}), \quad Q(x_i|x_{i-k}^{i-1}) \geq 0, \quad \sum_{x_i} Q(x_i|x_{i-k}^{i-1}) = 1. \quad (4)$$

Rozważamy też *liczbę podstłów*  $V(k|x_1^n) := \#\{x_{i+1}^{i+k} : 0 \leq i \leq n - k\}$ . *Penalizowane maksimum wiarogodności* (PML) to  $\mathbb{P}(x_1^n) := w_n \max_{k \geq 0} \frac{w_k \hat{\mathbb{P}}(k|x_1^n)}{Z(k|x_1^n)}$ , gdzie  $w_k := \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$  oraz  $\log Z(k|x_1^n) := k \log D + DV(k|x_1^n)(\log n + 6)$ . Ponieważ  $\sum_{n \geq 0} \sum_{x_1^n} \mathbb{P}(x_1^n) \leq 1$ , zachodzi  $\mathbf{E} K(X_1^n) \geq H(X_1^n)$  dla *entropii PML*  $K(u) := -\log \mathbb{P}(u)$ . Mamy też mocną i słabą uniwersalność,  $\lim_{n \rightarrow \infty} K(X_1^n)/n = h$  pnp. i w  $L^1$ . Stąd wykładnik redundancji jest ograniczony przez *informację wzajemną PML*  $J(u, v) := K(u) + K(v) - K(u, v)$  jako

$$\beta \leq \text{hilb}_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{E} K(X_1^n) - hn] = \text{hilb}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} J(X_1^n; X_{n+1}^{2n}). \quad (5)$$

Statystyka  $M(x_1^n) := \min \{k \geq 0 : \hat{\mathbb{P}}(k|x_1^n) \geq \mathbb{P}(x_1^n)\}$  jest zgodnym i asymptotycznie nieobciążonym estymatorem *rzędu Markowa*. Mamy  $\lim_{n \rightarrow \infty} M(X_1^n) = M$  pnp. i w  $L^1$ , gdzie  $M := \inf \{k \geq 0 : H(X_i|X_{i-k}^{i-1}) = h\}$  oraz  $H(X|Y) := H(X, Y) - H(Y)$ . Ponieważ zachodzi nierówność  $M(x_1^n)K(x_1^n) \leq n \log n$ , zachodzi też ograniczenie

$$\text{hilb}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} J(X_1^n; X_{n+1}^{2n}) \leq \text{hilb}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[ DV(X_1^n) + \frac{n \log D}{K(X_1^n)} \right], \quad (6)$$

gdzie *liczba podstłów Markowa* jest zdefiniowana jako  $V(x_1^n) := V(M(x_1^n)|x_1^n)$ . Potęgowy wzrost statystyki  $V(x_1^n) \sim n^{0.8}$  obserwuje się dla języka naturalnego.

Łącząc nierówności (??), (??) i (??), otrzymujemy twierdzenie o faktach i słowach.

- [1] J. P. Crutchfield and D. P. Feldman, Regularities unseen, randomness observed: The entropy convergence hierarchy, *Chaos*, 15, 25–54, 2003
- [2] Ł. Dębowski, On the vocabulary of grammar-based codes and the logical consistency of texts, *IEEE Transactions on Information Theory*, 57, 4589–4599, 2011
- [3] Ł. Dębowski, Information Theory Meets Power Laws: Stochastic Processes and Language Models, *Wiley & Sons*, 2021
- [4] Ł. Dębowski, A refutation of finite-state language models through Zipf’s law for factual knowledge, *Entropy*, 23, 1148, 2021
- [5] J. Hestness, S. Narang, N. Ardalani, G. Diamos, H. Jun, H. Kianinejad, M. Patwary, M. Ali, Y. Yang, and Y. Zhou, Deep learning scaling is predictable, empirically, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/1712.00409>, 2017
- [6] W. Hilberg, Der bekannte Grenzwert der redundanzfreien Information in Texten — eine Fehlinterpretation der Shannonschen Experimente?, *Frequenz*, 44, 243–248, 1990
- [7] J. Kaplan, S. McCandlish, T. Henighan, T. B. Brown, B. Chess, R. Child, S. Gray, A. Radford, J. Wu, and D. Amodei, Scaling laws for neural language models, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2001.08361>, 2020
- [8] R. Takahira, K. Tanaka-Ishii, and Ł. Dębowski, Entropy rate estimates for natural language—a new extrapolation of compressed large-scale corpora, *Entropy*, 18, 364, 2016
- [9] K. Tanaka-Ishii, Statistical Universals of Language: Mathematical Chance vs. Human Choice, *Springer*, 2021

## TOPOLOGICZNE METODY WIZUALIZACJI DANYCH

**Paweł Dłotko**

Centrum Dioscuri w Topologicznej Analizie Danych

e-mail: [pdlotko@gmail.com](mailto:pdlotko@gmail.com)

Jedną z często pomijanych, lecz niezwykle ważnych metod w statystyce jest wizualizacja danych. Już w latach '70 obserwacje Anscombe'a [1] pokazały, że opieranie się wyłącznie na wartościach statystyk opisowych może prowadzić do błędnych wniosków dotyczących analizowanych danych. W jego przykładzie, cztery zbiory danych o tych samych wartościach statystyk opisowych mają bardzo różne rozkłady. Wniosek z tej pracy jest jasny: zawsze należy wykonać wykres danych. Jednakże, nie jest to bezpośrednio możliwe w przypadku danych wysokowymiarowych. W tym referacie przedstawię kilka inspirowanych topologią metod wizualizacji takich danych. Zacznę od klasycznych algorytmów Mapper i Ball Mapper, a następnie omówię kilka nowych pomysłów. Są one również opisane w pracach [2] oraz [3].

[1] F. J. Anscombe, Graphs in statistical analysis, *The American Statistician*, 27(1), 17-21, 1973

[2] P. Dłotko, Obrazy funkcji w praktyce, *ACADEMIA. Magazyn Polskiej Akademii Nauk*, No 4 (72) Obrazy, [http://journals.pan.pl/Content/125751/PDF/66-69\\_Dlotko\\_pol.pdf](http://journals.pan.pl/Content/125751/PDF/66-69_Dlotko_pol.pdf)

[3] P. Dłotko, On the shape that matters – topology and geometry in data science, *EMS MAG132PP. 5-13*, <https://euromathsoc.org/magazine/articles/190>

OPTYMALNA DŁUGOŚĆ BLOKU BOOTSTRAPOWEGO W PRZYPADKU  
OKRESOWO SKORELOWANYCH SZEREGÓW CZASOWYCH

**Anna Dudek**

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

e-mail: aedudek@agh.edu.pl

Omówimy problem wyboru optymalnej długości bloku w przypadku okresowo skorelowanych procesów dla dwóch blokowych metod bootstrap: Uogólnionej Metody Bloków Sezonowych i Rozszerzonej Metody Bloków Ruchomych. Rozważymy dwa problemy estymacji: wartość oczekiwaną oraz średnie sezonowe. W obu przypadkach optymalna długość bloku jest uzyskiwana poprzez minimalizację błędu średniokwadratowego odpowiedniego estymatora wariancji bootstrapowej i we wszystkich przypadkach jest ona proporcjonalna do pierwiastka sześciennego z długości próby. Na koniec przedstawimy wyniki przeprowadzonych symulacji, w których obliczono optymalne długości bloków dla kilku okresowo skorelowanych szeregów czasowych oraz rzeczywiste prawdopodobieństwa pokrycia bootstrapowych przedziałów ufności dla rozważanych parametrów.

[1] P. Bertail, A.E. Dudek , Optimal choice of bootstrap block length for periodically correlated time series, *Bernoulli*, 2024, 30(3), 2521–2545

ALGORYTMY MCMC OPARTE O RÓWNANIE LANGEVINA BEZ  
LIPSCHITZOWSKIEJ CIĄGŁOŚCI GRADIENTU POTENCJAŁU

**Matej Benko**

Brno University of Technology  
e-mail: matej.benko@vutbr.cz

**Iwona Chlebicka**

Uniwersytet Warszawski  
e-mail: i.chlebicka@mimuw.edu.pl

**Jørgen Endal**

Norwegian University of Science and Technology  
e-mail: jorgen.endal@ntnu.no

**Błażej Miasojedow**

Uniwersytet Warszawski  
e-mail: b.miasojedow@mimuw.edu.pl

Jednym z podstawowych problemów w uczeniu maszynowym i w statystyce obliczeniowej jest generowanie zmiennych losowych z zadanego rozkładu z gęstością znaną z dokładnością do stałej normującej. W sytuacji gdy dla pewnego potencjału  $V$ , gęstość jest postaci

$$\varrho(x) \propto \exp(-V(x))$$

to algorytm generowania można skonstruować w oparciu o dyskretyzację procesu dyfuzji zadanego przez równania Langevina postaci

$$dX_t = -\nabla V(X_t)dt + \sqrt{2}dB_t,$$

dla którego  $\varrho$  jest rozkładem stacjonarnym. Problem przy założeniu, że  $\nabla V$  jest funkcją lipschitzowską jest dobrze zbadany. W referacie skupimy się na sytuacji gdy to założenie nie jest spełnione. Przedstawimy wyniki o zbieżności zmodyfikowanej wersji algorytmu Langevin Monte Carlo.

ZASTOSOWANIE METOD TOPOLOGICZNYCH W STATYSTYCE  
MATEMATYCZNEJ NA PRZYKŁADZIE WIELOWYMIAROWYCH TESTÓW  
ZGODNOŚCI

**Rafał Topolnicki**

Centrum Dioscuri w Topologicznej Analizie Danych, Instytut Matematyczny PAN  
e-mail: rafal.topolnicki@impan.pl

**Niklas Hellmer**

Centrum Dioscuri w Topologicznej Analizie Danych, Instytut Matematyczny PAN  
e-mail: nhellmer@impan.pl

**Paweł Dłotko**

Centrum Dioscuri w Topologicznej Analizie Danych, Instytut Matematyczny PAN  
e-mail: pdlotko@gmail.com

**Łukasz Stettner**

Instytut Matematyczny PAN  
e-mail: l.stettner@impan.pl

W referacie przedstawiona zostanie nowa konstrukcja wielowymiarowych testów zgodności w problemach jednej (one-sample) i dwóch prób (two-sample) wykorzystująca metody topologicznej analizy danych (TDA) [1, 2]. W problemie one-sample celem jest sprawdzenie czy dana próba statystyczna pochodzi z założonego wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa, w problemie two-sample dysponujemy dwiema próbami a hipotezą zerową jest, że pochodzą one z tego samego rozkładu prawdopodobieństwa. W pierwszym przypadku dla danych jednowymiarowych szeroko stosowane są m. in. testy Kołmogorowa-Smirnowa, Andersona-Darlinga czy Cramera-von Misesa podczas gdy dla dwóch prób zastosowanie znajdują testy np. chi-kwadrat czy permutacyjne. Metody te jednak albo nie uogólniają się na wyższe wymiary albo ze względu na olbrzymia złożoność obliczeniową ich praktyczne zastosowanie nie jest możliwe. Dodatkowo dla danych wyżej wymiarowych ich skuteczność drastycznie maleje, szczególnie dla prób o małych licznosciach. Narzędzia topologii, które coraz częściej znajdują zastosowanie w statystycznych, analizie danych i uczeniu maszynowym, zastosowane do konstrukcji testów zgodności pozwoliły na pokonanie tych ograniczeń. Omówione w referacie TopoTesty [2, 3] stanowią rodzinę statystycznych testów zgodności, działających na zasadzie porównania topologicznych sygnatur danych niezależnych od wymiaru. Asymptotyczne własności rozważanych testów zostały pokazane z zachowaniem rygoru matematycznego a efektywność dla prób o skończonym rozmiarze została sprawdzona numerycznie w wielkoskalowych symulacjach Monte Carlo. Pokazano w nich, że opracowane przez nas podejście przewyższa skutecznością metody stosowane do tej pory w statystyce. Kod rozwijanej biblioteki dostępny jest publicznie w postaci pakietu `topotest` w języku Python.

[1] F. Chazal, B. Michel, An Introduction to Topological Data Analysis: Fundamental and Practical Aspects for Data Scientists, *Frontiers in Artificial Intelligence*, 2021, 4

[2] P. Dłotko, N. Hellmer, Ł. Stettner, R. Topolnicki, Topology-driven goodness-of-fit tests in arbitrary dimensions, *Statistics and Computing*, 2024, 34

[3] T. Fleckenstein, N. Hellmer, When Do Two Distributions Yield the Same Expected Euler Characteristic Curve in the Thermodynamic Limit?, *preprint*, ArXiv:2401.04580



# Operatory nielokalne

ORGANIZATORZY:

TADEUSZ KULCZYCKI (PWR)

## NIELOKALNE ZAGADNIENIA BRZEGOWE

**Krzysztof Bogdan**

Politechnika Wrocławska

e-mail: krzysztof.bogdan@pwr.edu.pl

Procesy Markowa mogą służyć do opisu zjawisk ewolucyjnych, takich jak przenoszenie się ciepła czy rozprzestrzenianie się populacji w danym obszarze. Takie ‘przemieszczanie się’ może zachodzić w sposób ciągły lub poprzez ‘skoki’ a jego efekty statystyczne opisane są za pomocą cząstkowych równań parabolicznych i eliptycznych. Warunki typu Dirichleta w takich równaniach związane są z ‘pochłanianiem’ lub ‘emitowaniem’ cząsteczek na/z zewnątrz obszaru. Trudniejsze i bardziej zróżnicowane warunki Neumanna, związane z ‘odbijaniem się’ cząsteczek, są przedmiotem ważnych aktualnych badań, do których bardzo chciałbym zaprosić, bo są intuicyjnie zrozumiałe i ciągle jeszcze w początkowej fazie rozwoju. Dla ilustracji porozmawiamy o skokowych procesach Markowa i nielokalnych warunkach brzegowych z prac [1] i [2].

[1] K. Bogdan, T. Grzywny, K. Pietruska-Pałuba, A. Rutkowski, Extension and trace for nonlocal operators, *J. Math. Pures Appl. (9)*, 2020, 137, 33–69

[2] K. Bogdan, M. Kunze, The fractional Laplacian with reflections, *Potential Anal*, 2023+

PROCESY LÉVY'EGO W OBSZARACH OGRANICZONYCH: NIELOKALNE  
WARUNKI BRZEGOWE W JĘZYKU TRAJEKTORII.

**Piotr Garbaczewski**

Instytut Fizyki, Uniwersytet Opolski

e-mail: pgar@uni.opole.pl

Przedstawię podstawowe wyniki pracy [1], gdzie podjęto wspieraną numerycznie analizę nierównoważnych scenariuszy odbicia od barier dla rodziny  $\alpha$ -stabilnych procesów Lévy'ego, których dynamika jest ograniczona do interwału na prostej rzeczywistej. Dla różnych "mechanizmów" odbicia, odpowiadające im procesy losowe mają odmienne charakterystyki spektralne i statystyczne, jak np. tempo relaksacji do stanu równowagi, czy funkcyjny kształt asymptotycznych gęstości prawdopodobieństwa. Różnicowanie dotyczy też analitycznych form nielokalnych warunków brzegowych typu Neumanna.

[1] P. Garbaczewski, M. Żaba, Lévy processes in bounded domains: Path-wise reflection scenarios and signatures of confinement, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2022, 55, 305005

[2] P. Garbaczewski, V. A. Stephanovich, Fractional Laplacians in bounded domains: Killed, reflected, censored, and taboo Lévy flights, *Phys. Rev. E*, 2019, 99, 042126

[3] K. Bogdan, M. Kunze, The fractional Laplacian with reflections, *Potential Analysis*, 2023, <https://doi.org/10.1007/s11118-023-10111-7>

## NIELOKALNY OBWÓD I KRZYWIZNA

**Tomasz Grzywny**

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

e-mail: tomasz.grzywny@pwr.edu.pl

Podczas referatu zostanie omówione pojęcie nielokalnego obwodu, który jest zdefiniowany przez dowolną dodatnią miarę borelowską na  $\mathbb{R}^d$ , która całkuje funkcję  $1 \wedge |x|$ . Taka definicja nielokalnego obwodu obejmuje szeroki wachlarz obiektów, które były już badane w literaturze, w tym obwody ułamkowe i anizotropowe obwody ułamkowe. Ponadto, dla symetrycznej absolutnie ciągłej miary  $\nu$ , której gęstość jest porównywalna z radialną funkcją nierosnącą zostanie zdefiniowana nielokalna krzywizna. Obiekty te mogą być postrzegane jako punktowe działanie generatora półgrupy przejścia procesu Lévy'ego. Główna część wykładu będzie poświęcona badaniu asymptotycznego zachowania nielokalnych obwodów i krzywizn. W bezpośrednich zastosowaniach odzyskamy znane wyniki zbieżności dla ułamkowych i anizotropowych ułamkowych obwodów i krzywizn.

Wykład będzie oparty na wspólnym projekcie z Wojciechem Cyganem (Uniwersytet Wrocławski) oraz Julią Lenczewską (Politechnika Wrocławska).

STABILNOŚĆ DIAGRAMU FAZOWEGO DLA GRADIENTOWEGO RÓWNANIA  
ZWYCZAJNEGO Z PAMIĘCIĄ**Piotr Kalita**Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński, ul. Łojasiewicza 6, 30-348  
Kraków, Polska  
e-mail: piotr.kalita@ii.uj.edu.pl**Piotr Zgliczyński**Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński, ul. Łojasiewicza 6, 30-348  
Kraków, Polska  
e-mail: umzglicz@cyf-kr.edu.pl

Rozważamy następujące wektorowe gradientowe równanie zwyczajne

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{gdzie } f \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \quad \text{oraz } f = \nabla F. \quad (1)$$

Zakładając że powyższe zagadnienie ma atraktor globalny, badamy jego perturbację poprzez wyrażenie z pamięcią

$$x'(t) = f(x(t)) + \varepsilon \int_{-\infty}^t M(t-s)x(s) ds, \quad (2)$$

gdzie  $M : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  jest zależną od czasu macierzą, której norma maleje wykładniczo do zera gdy  $t \rightarrow \infty$ . Główny wynik, stanowi, że jeśli w układzie (1) punkty równowagi są hiperboliczne, a ich stabilne i niestabilne rozmaitości przecinają się transwersalnie, to struktura połączeń heteroklinicznych jest zachowana w nieskończenie wymiarowym układzie (2) dla małych  $\varepsilon$ . W dowodzie wykorzystujemy transformację Dafermosa. Pokazujemy, że w zagadnieniu zaburzonym dodatkowa nieskończenie wymiarowa zmienna pochodząca od wyrażenia z pamięcią po tej transformacji jest lokalnie stabilna. To pozwala na przeprowadzenie dowodu, że lokalne rozmaitości stabilne i niestabilne punktów równowagi zagadnienia (2), gdy stałą  $\varepsilon$  jest mała, są  $C^1$  blisko, w odpowiednim sensie, lokalnym rozmaitościom stabilnym i niestabilnym dla (1). W efekcie struktura przecięć transwersalnych jest zachowana w układzie zaburzonym.

[1] P. Kalita, P. Zgliczyński, Stability of phase diagram for a gradient ODE with memory, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2406.00910>

TWIERDZENIE BÔCHERA DLA OPERATORÓW LÉVY'EGO Z  
ZABURZENIEM GRADIENTOWYM: PRZYPADEK NADKRYTYCZNY

**Tomasz Klimsiak**

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki,  
Instytut Matematyczny PAN  
e-mail: tomas@mat.umk.pl

Klasyczne twierdzenie Bôchera (zob. [1]) orzeka, że każda nieujemna funkcja harmoniczna (względem operatora Laplace'a)  $u : B_1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ma postać

$$u(x) = a|x|^{2-d} + h(x), \quad x \in B_1, \quad (1)$$

dla pewnej nieujemnej funkcji harmonicznej  $h : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  oraz stałej  $a \geq 0$ . Prawie osiemdziesiąt lat później, w kontekście teorii półliniowych równań eliptycznych z osobliwościami izolowanymi, H. Brezis i P.L. Lions uogólnili twierdzenie Bôchera (zob. [2]) dowodząc, że każde nieujemne rozwiązanie dystrybucyjne nierówności

$$-\Delta u + f \geq 0 \quad \text{in} \quad B(0, 1) \setminus \{0\},$$

gdzie  $f \in L^1_{\text{loc}}(B_1)$ , jest rozwiązaniem dystrybucyjnym równania z miarą:

$$-\Delta u + f = \mu_0 + \delta_0 \quad \text{w} \quad B_1,$$

dla pewnej nieujemnej miary Radona  $\mu_0$  na  $B_1$ . Twierdzenia tego typu stały się później podstawowym narzędziem wyżej wspomnianej teorii.

Pierwszy wynik na temat twierdzenia Bôchera dla operatorów nielokalnych został opublikowany w 2018 r. (zob. [3]). Autorzy pracy dowodzą, że każda funkcja  $s$ -harmoniczna na  $B_1 \setminus \{0\}$  (tj.  $\Delta^s u(x) = 0$ ,  $x \in B_1 \setminus \{0\}$ ) ma postać (1) z  $|x|^{2s-d}$  w miejscu  $|x|^{2-d}$  oraz  $s$ -harmoniczną funkcją  $h$  na  $B_1$ . W 2020 r. Congming Li i in. (zob. [4]) rozszerzyli ten wynik na nieujemne rozwiązania dystrybucyjne nierówności

$$-\Delta^s u + b(\cdot)\nabla u + f \geq 0 \quad \text{w} \quad B(0, 1) \setminus \{0\},$$

z  $s \in (1/2, 1]$  (przypadek podkrytyczny) oraz  $b \in C^1(B_1)$ . Przypadki krytyczny i nadkrytyczny pozostawiono jako problemy otwarte.

Opowiemy o podejściu probabilistycznym do twierdzeń typu Bôchera oraz o rozwiązaniu problemów krytycznego i nadkrytycznego.

[1] M. Bôcher, Singular points of functions which satisfy partial differential equations of the elliptic type, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1903, 9, 455-465

[2] H. Brezis, P.L. Lions, A note on isolated singularities for linear elliptic equations, *Mathematical analysis and applications, Part A, Adv. Math. Suppl. Stud.*, 7a, 1981

[3] H. Chen, A. Quaas, Classification of isolated singularities of nonnegative solutions to fractional semi-linear elliptic equations and the existence results, *J. Lond. Math. Soc.*, 2018, 97(2), 196-221

[4] Congming Li, Chenkai Liu, Zhigang Wu, Hao Xu, Non-negative solutions to fractional Laplace equations with isolated singularity, *Adv. Math.*, 2020, 373, 107329

## TOŻSAMOŚCI I NIERÓWNOŚCI DLA PROCESÓW LÉVY'EGO

**Katarzyna Pietruska-Pałuba**

Uniwersytet Warszawski  
e-mail: kpp@mimuw.edu.pl

Przedstawimy przegląd nierówności i tożsamości funkcyjnych, związanych z procesami Lévy'ego i stowarzyszonymi z nimi wyrażeniami, tzw. formami Sobolewa-Bregmana, które są uogólnieniem form Dirichleta dla takich procesów. Wyniki te są nowe zwłaszcza dla funkcji z przestrzeni  $L^p$ , gdzie  $p \neq 2$ . Będą to: optymalna nierówność Hardy'ego dla procesów stabilnych [2], tożsamości Hardy'ego-Steina [4], tożsamości Douglasa [2.3].

- [1] K. Bogdan, T. Grzywny, K. Pietruska-Pałuba, A. Rutkowski, Extension and trace for nonlocal operators, *J. Math. Pures Appl.*, 2020, 137, 33-69
- [2] K. Bogdan, T. Jakubowski, J. Lenczewska, K. Pietruska-Pałuba, Optimal Hardy inequality for the fractional Laplacian on  $L^p$ , *J. Funct. Anal.*, 2022, 282(8), Paper No. 109395
- [3] K. Bogdan, T. Grzywny, K. Pietruska-Pałuba, A. Rutkowski, Nonlinear nonlocal Douglas identity, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 2023, 62(5): Paper No. 151
- [4] K. Bogdan, M. Gutowski, K. Pietruska-Pałuba, Polarized Hardy-Stein identity, *preprint*, arXiv:2309.09856

ROZWIĄZANIE SAMOPODOBNE DLA UŁAMKOWEGO OPERATORA  
LAPLACE'A W STOŻKACH

**Dominika Pilarczyk**  
Politechnika Wrocławska  
e-mail: dominika.pilarczyk@pwr.edu.pl

Przedstawimy wyniki wspólnych badań z Krzysztofem Bogdanem, Piotrem Knosallą i Łukaszem Leżajem. Referat opiera się na pracy [1], w której konstruujemy samopodobne rozwiązanie równania ciepła z ułamkowym laplasjanem oraz z warunkami brzegowymi Dirichleta w każdym *grubym* stożku. Ponadto opisujemy asymptotykę dla dużych czasów rozwiązań odpowiadającego problemu Cauchy'ego w stożku.

[1] K. Bogdan, P. Knosalla, Ł. Leżaj, D. Pilarczyk, Self-similar solution for fractional Laplacian in cones, *Electronic Journal of Probability*, 2024, 29, Article 54



STOCHASTYCZNE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZE SKOKAMI I  
NIEREGULARNYM DRYFEM – ASPEKTY ANALITYCZNE I NUMERYCZNE**Paweł Przybyłowicz**Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie, Wydział Matematyki  
Stosowanej, al. Mickiewicza 30 30-059 Kraków  
e-mail: pprzybyl@agh.edu.pl

Stochastyczne równania różniczkowe (SRR) ze skokami i nieregularnym dryfem pojawiają się, między innymi, podczas modelowania cen/zapotrzebowania energii, gwałtownych zmian zachodzących na rynkach finansowych, teorii sterowania czy też układów przełączających. Modelowanie matematyczne tego typu zjawisk rzeczywistych często prowadzi do utraty gładkości współczynnika dryfu rozważanego SRR – współczynnik ten może być nieciągły względem zmiennej przestrzennej. Nieciągłość ta powoduje wiele istotnych problemów analitycznych oraz numerycznych. Podczas referatu przedstawione zostaną wyniki dotyczące istnienia, jednoznaczności oraz błędu aproksymacji rozwiązań stochastycznych równań ze skokami w przypadku nieciągłego dryfu. Zasygnalizowane zostaną również pewne problemy otwarte. Referat oparty jest na publikacjach [1]-[5].

- [1] P. Przybyłowicz, M. Szölgényi, F. Hu, Existence and uniqueness of solutions of SDEs with discontinuous drift and finite activity jumps, *Statistics and Probability Letters*, 2021, 174, 109072
- [2] P. Przybyłowicz, M. Szölgényi, Existence, uniqueness, and approximation of solutions of jump-diffusion SDEs with discontinuous drift, *Applied Mathematics and Computation*, 2021, 403, 126191
- [3] P. Przybyłowicz, V. Schwarz, M. Szölgényi, Randomized Milstein algorithm for approximation of solutions of jump-diffusion SDEs, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2024, 440, 115631
- [4] P. Przybyłowicz, V. Schwarz, A. Steinicke, M. Szölgényi, A Skorohod measurable universal functional representation of solutions to semimartingale SDEs, *accepted in 2024 in Stochastic Analysis and Applications*, <https://arxiv.org/abs/2201.06278>
- [5] P. Przybyłowicz, V. Schwarz, M. Szölgényi, A higher order approximation method for jump-diffusion SDEs with discontinuous drift coefficient, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2024, 538, 128319

O PROBLEMIE NEUMANNA DLA RÓWNAŃ ELIPTYCZNYCH  
Z OPERATORAMI TYPU LÉVY'EGO**Andrzej Rozkosz**Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika  
e-mail: rozkosz@mat.umk.pl

Niech  $D \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , będzie ograniczoną, wypukłą dziedziną klasy  $C^2$ ,  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami mierzalnymi i  $\lambda > 0$ . Rozważać będziemy problem Neumanna

$$-Lu + \lambda u = f \quad \text{w } D, \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{\mathbf{n}}} = -g \quad \text{w } D^c. \quad (*)$$

Powyżej  $\bar{\mathbf{n}}(x) = \mathbf{n}(\Pi(x))$ ,  $\mathbf{n}$  jest jednostkowym wektorem normalnym skierowanym do wewnątrz,  $\Pi(x)$  oznacza rzutowanie  $x$  na  $\bar{D}$ , a  $L$  jest operatorem różniczkowo-całkowym typu Lévy'ego. Modelowym przykładem jest

$$L = a\Delta + b\Delta^{\alpha/2}$$

dla pewnych stałych  $\alpha \in (0, 2)$  i  $a, b$  takich, że  $a^2 + b^2 > 0$ .

W przypadku, gdy  $L$  zawiera część nielokalną, nie ma ogólnie przyjętej definicji rozwiązania. W pierwszej części referatu krótko wspomnimy o różnych definicjach rozważanych w literaturze. Następnie podamy definicję rozwiązania probabilistycznego, które nieściśle mówiąc, zadane jest przez pewien funkcjonał typu Kaca–Feynmana od procesu odbitego w  $\bar{D}$  związanego z operatorem  $L$ .

Pokażemy, że przy naturalnych założeniach na  $f, g$  istnieje jednoznaczne rozwiązanie probabilistyczne (\*) i jest ono granicą rozwiązań problemów w  $\mathbb{R}^d$  z odpowiednim składnikiem penalizacyjnym. Ponadto otrzymane rozwiązanie probabilistyczne jest rozwiązaniem lepkościowym w sensie zdefiniowanym w [1]. Referat oparty będzie na pracy [2].

[1] G. Barles, C. Georgelin, R.E. Jakobsen, On Neumann and oblique derivatives boundary conditions for nonlocal elliptic equations, *Journal of Differential Equations*, (2014) 256, 1368–1394.

[2] A. Rozkosz, L. Słomiński, Reflected Skorokhod equations and the Neumann boundary value problem for elliptic equations with Lévy-type operators, *preprint*, ArXiv:2303.12664.

## RÓWNANIA Z UŁAMKOWYM LAPLASJANEM W ZBIORACH LIPSCHITZA

**Artur Rutkowski**

Politechnika Wrocławska

e-mail: artur.rutkowski@pwr.edu.pl

Opowiem o reprezentacjach całkowych rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego–Dirichleta dla ułamkowego równania ciepła w ograniczonych zbiorach Lipschitza  $D$ :

$$\begin{cases} (\partial_t + (-\Delta)^{\alpha/2})u(t, x) = 0, & t \in (0, T), x \in D, \\ u(t, x) = g(t, x), & t \in (0, T), x \in D^c, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in D. \end{cases} \quad (1)$$

Jądra występujące w reprezentacji mogą być interpretowane poprzez rozkłady miejsca wyjścia czasoprzestrzennego procesu  $\alpha$ -stabilnego z cylindra  $(0, T) \times D$ . W celu opisania osobliwych rozwiązań zagadnienia (??), konstruujemy tzw. paraboliczne jądro Martina i pokazujemy jego hölderowską regularność do brzegu. Kluczowym wynikiem pośrednim jest relatywna regularność do brzegu dla ułamkowego równania Poissona  $(-\Delta)^{\alpha/2}u = f$ . Referat na bazie pracy wspólnej z G. Armstrongiem i K. Bogdanem.

[1] G. Armstrong, K. Bogdan, A. Rutkowski, Caloric functions and boundary regularity for the fractional Laplacian in Lipschitz open sets, *preprint*, ArXiv:2403.03840

# METODA PARAMETRYSY DLA NIESYMETRYCZNYCH OPERATORÓW TYPU LÉVY'EGO

**Karol Szczypkowski**  
 Politechnika Wrocławska  
 e-mail: karol.szczypkowski@pwr.edu.pl

Dobrze wiadomo, że ruch Browna jest on generowany przez operator Laplace'a, a odpowiadająca mu półgrupa dana jest jawnie przez jądro Gaussa-Weierstrassa, które jest rozwiązaniem fundamentalnym klasycznego równania ciepła  $\partial_t u = \Delta u$ . Chcemy badać rozszerzenia tego modelu dla operatorów typu Lévy'ego. Operator  $\mathcal{L}$  nazywany operatorem typu Lévy'ego, jeśli jest określony na funkcjach gładkich o zwartym nośniku i dany jest dla nich następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(x) = & c(x)f(x) + b(x) \cdot \nabla f(x) + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} \left( f(x+z) - f(x) - \mathbf{1}_{|z|<1} \langle z, \nabla f(x) \rangle \right) N(x, dz). \end{aligned}$$

$c(x)$ ,  $b(x)$ ,  $a_{ij}(x)$  są pewnymi funkcjami, a  $N(x, dz)$  jest miarą intensywności. Nazywamy je współczynnikami operatora. Modelują one zachowanie cząstki w punkcie  $x$ . Na przykład wektor  $b(x)$  definiuje dryf, a  $N(x, B)$  jest intensywnością skoków z  $x$  do zbioru  $x+B \subset \mathbb{R}^d$ .

Naszym celem jest wyznaczenie warunków nakładanych na współczynniki operatora, które wystarczą do tego, aby miał on rozszerzenie do generatora półgrupy fellerowskiej. Ponadto warunki te powinny umożliwić analizę odpowiadającego mu jądra ciepła. Główną uwagę skupimy na części *nielokalnej* (całkowej) operatora, dbając o to, aby klasa rozważanych operatorów była dostatecznie bogata. W naszych badaniach termin *niesymetryczny* odnosi się do faktu, że ze względu na strukturę rozważanych przez nas operatorów, niezależnie od symetrii lub braku symetrii miary  $N(x, dz)$  dla ustalonego  $x$ , mogą one nie mieć rozszerzeń samosprzężonych. Dlatego podejście oparte o formy Dirichleta nie ma tutaj zastosowania. Jednocześnie zwracamy szczególną uwagę na to, w jaki sposób brak symetrii miary  $N(x, dz)$  wpływa na nasze wyniki, ponieważ zazwyczaj powoduje on dodatkowe trudności. Zauważamy również, że istnieją metody oparte o rachunek symboliczny, ale zazwyczaj wymagają one dużej regularności współczynników. Jest to ograniczenie, którego nie chcemy wprowadzać.

W tej sytuacji decydujemy się na metodę parametrysy, której pierwotną rolą jest dostarczenie kandydata na rozwiązanie fundamentalne (jądro całkowe półgrupy). Każde użycie tej metody niesie ze sobą różne trudności techniczne, które trzeba pokonać, a zależą one od klasy współczynników, które są brane pod uwagę. Poruszone zostaną następujące kwestie: istnienie i jednoznaczność (słabego lub punktowego) rozwiązania fundamentalnego równania

$$\partial_t u(t, x) = \mathcal{L}_x u(t, x),$$

jego oszacowania, regularność oraz inne własności jakościowe, a także własności odpowiadających mu półgrup i ich generatorów w różnych przestrzeniach funkcji. W pracy [1] proponujemy też ogólne funkcjonalno-analityczne podejście do metody parametrysy.

- [1] J. Minecki, K. Szczypkowski, Nonsymmetric Lévy-type operators, *Math. Nachr.*, 2024, DOI: 10.1002/mana.202300150  
 [2] K. Szczypkowski, Fundamental solution for super-critical non-symmetric Lévy-type operators, *Adv. Differential Equations*, 2024, 29 (5/6), 291-338  
 [3] T. Grzywny, K. Szczypkowski, Heat kernels of non-symmetric Lévy-type operators, *J. Differential Equations*, 2019, 267 (10), 6004-6064

CZY ZMIANY FENOTYPU Z NABŁONKOWEGO NA MEZENCHYMALNY I  
ODWROTNIE TŁUMACZĄ POWSTAWANIE WIELOOGNISKOWEJ POSTACI  
CHOROBY? MODELOWANIE MATEMATYCZNE INWAZJI  
NOWOTWOROWEJ.

**Zuzanna Szymańska**  
Uniwersytet Warszawski  
e-mail: zk.szymanska@uw.edu.pl

**Mirosław Lachowicz**  
Uniwersytet Warszawski  
e-mail: lachowicz@mimuw.edu.pl

**Nikolaos Sfakianakis**  
University of St Andrews  
e-mail: n.sfakianakis@st-andrews.ac.uk

**Mark A. J. Chaplain**  
University of St Andrews  
e-mail: majc@st-andrews.ac.uk

Rokowanie w przypadku chorób nowotworowych zależy w głównej mierze od tego, czy guz jest złośliwy, czyli czy komórki nowotworowe posiadają zdolność naciekania sąsiednich tkanek oraz tworzenia przerzutów. Aktywacja programu EMT (przejście nabłonkowo-mezenchymalne) oraz jego odwrotność, MET (przejście mezenchymalno-nabłonkowe), są postrzegane jako kluczowe mechanizmy procesu inwazji nowotworu. Na pewnym etapie rozwoju guza komórki oddzielają się od jego pierwotnej masy, naciekają otaczającą tkankę i migrują. Naciekanie tkanek stanowi pierwszy krok w skomplikowanym procesie wtórnego rozprzestrzeniania się choroby, podczas którego komórki nowotworowe przemieszczają się do innych części organizmu, tworząc nowe ogniska nowotworowe, znane jako przerzuty.

Proponujemy nowy model matematyczny opisujący proces naciekania zdrowych tkanek przez komórki nowotworowe, uwzględniający wpływ zmiany fenotypu z nabłonkowego na mezenchymalny i odwrotnie. Przeprowadzone symulacje numeryczne sugerują, że plastyczność fenotypowa komórek nowotworowych jest kluczowa dla postępu choroby [1]. Wyniki symulacji ilustrują rozprzestrzenianie się guza pierwotnego i powstawanie wieloogniskowej postaci choroby, przypominając sytuację *in vivo*, w której często obserwuje się liczne, synchroniczne ogniska nowotworowe. W przypadku pacjentek z rakiem piersi taki obraz choroby wiąże się z gorszym rokowaniem.

[1] Z. Szymańska, M. Lachowicz, N. Sfakianakis, M.A.J. Chaplain., Mathematical modelling of cancer invasion: Phenotypic transitioning provides insight into multifocal foci formation, *J. Comput. Sci.*, 2024, 75, 102175



# Przestrzenie Banacha: geometria i operatory

ORGANIZATORZY:

TOMASZ KANIA (UJ)

UNITARNA RÓWNOWAŻNOŚĆ DWUSTRONNYCH PRZESUNIĘĆ WAŻONYCH  
Z WAGAMI OPERATOROWYMI**Michał Buchała**Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego  
e-mail: `michal.buchala@doctoral.uj.edu.pl`

Jeśli  $H$  jest przestrzenią Hilberta,  $(S_i)_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbf{B}(H)$  jest jednostajnie ograniczonym ciągiem operatorów, to przesunięciem dwustronnym z wagami  $(S_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  nazywamy operator  $S \in \mathbf{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, H))$  dany wzorem:

$$S(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (S_i x_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}, \quad (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}, H).$$

W przypadku klasycznych przesunięć dwustronnych (z wagami skalarnymi) unitarna równoważność przesunięć  $S, S' \in \mathbf{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$  z wagami odpowiednio  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (\lambda'_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$  jest równoważna warunkowi

$$|\lambda_n| = |\lambda'_{n+k}|, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

dla pewnego  $k \in \mathbb{Z}$ ; ponadto unitarna równoważność jest zawsze zadana przez operator, którego macierz ma postać diagonalną (tzn. ma dokładnie jedną niezerową przekątną). Ten sam problem był rozważany w pracy [2] przez J. Kośmidera dla przesunięć z wagami operatorowymi, jednak autor ograniczył się do badania tych przesunięć, w przypadku których unitarna równoważność jest zadana za pomocą operatora o postaci diagonalnej. W referacie rozwiążemy problem unitarnej równoważności przesunięć dwustronnych w pełnej ogólności. Zaprezentujemy analog warunku (1) dla przesunięć z wagami operatorowymi. Pokażemy, że w przypadku pewnych przesunięć z wagami zdefiniowanymi na  $\mathbb{C}^2$ , unitarna równoważność może zawsze zostać zadana przez operator unitarny z co najwyżej dwiema niezerowymi przekątnymi. Wskażemy przykłady unitarnie równoważnych przesunięć z wagami na  $\mathbb{C}^k$ , w przypadku których jedyny operator unitarny, który je przeplata, ma dokładnie  $k$  niezerowych przekątnych. Referat jest oparty na pracy [1].

[1] M. Buchała, Unitarily equivalent bilateral weighted shifts with operator weights, *Opuscula Mathematica*, 2024, 44(5), przyjęty do publikacji, arXiv:2402.08770

[2] J. Kośmider, On unitary equivalence of bilateral operator valued weighted shifts, *Opuscula Mathematica*, 2019, 39(4), 543–555



## EKSTREMALNE KONTRAKCJE

Karol Gryksza

Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

e-mail: karol.gryksza@uken.krakow.pl

Punkty ekstremalne kuli jednostkowej w przestrzeni operatorowej  $\mathcal{L}(X, Y)$  (tutaj  $X$  oraz  $Y$  są przestrzeniami Banacha) nazywamy ekstremalnymi kontrakcjami.

W pracy [2] Grzaślewicz dowodzi, że w kuli jednostkowej w  $\mathcal{L}(H)$  ( $H$  jest tutaj dowolną przestrzenią Hilberta) nie znajdziemy żadnego wierzchołka. Ponadto Grzaślewicz dokonuje charakteryzacji punktów ekstremalnych w  $\mathcal{L}(H)$  - wynik ten stanowi współczesną motywację oraz podstawę do badań punktów ekstremalnych. W niedawno opublikowanej pracy Paul, Sain i Sohel [3] charakteryzują wybrane klasy ekstremalnych kontrakcji określonych na skończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha, w szczególności w klasie przestrzeni wielokątnych (a więc takich, w których kula jednostkowa ma skończenie wiele punktów ekstremalnych).

Referat na podstawie preprintu [1] stanowi próbę charakteryzacji ekstremalnych kontrakcji w zupełnie innym ujęciu. Geometria przestrzeni wielokątnych narzuca pewną mało intuicyjną charakteryzację dla rzeczywistych przestrzeni Banacha (została ona opisana w [3]). W trakcie referatu zostanie przedstawiona charakteryzacja bazująca na własnościach przestrzeni dualnych oraz wykorzystująca szersze klasy operatorów, takie jak punkty wierzchołkowe czy eksponowane.

[1] K. Gryksza, P. Wójcik, On extreme contractions and vertices in operator spaces, *preprint*, (unpublished)

[2] R. Grzaślewicz, Vertices in  $\mathcal{L}(H)$ , *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica*, **38** (2) (1997), 5–11

[3] K. Paul, D. Sain, S. Sohel, Extreme contractions on finite-dimensional Banach spaces, *Colloq. Math.*, **172** (2023), 65–83

## O PODPRZESTRZENIACH NIEROZKŁADALNYCH PRZESTRZENI BANACHA

**Piotr Koszmider**

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: piotr.math@proton.me

Rozważamy pytanie o to, które przestrzenie Banacha mogą być podprzestrzeniami nierozkładalnych przestrzeni Banacha. Pokazujemy iż dla każdej przestrzeni Banacha gęstości nie większej niż kontinuum, która nie dopuszcza  $\ell_\infty$  jako swojego ilorazu istnieje jej nadprzestrzeń, która jest nierozkładalną przestrzenią Banacha. Z drugiej strony, ponieważ przestrzeń  $\ell_\infty$  jest dopełnialna w każdej swojej nadprzestrzeni, żadna jej nadprzestrzeń nie może być podprzestrzenią nierozkładalnej przestrzeni Banacha. Z trzeciej strony istnieją jednak nierozkładalne przestrzenie Banacha, których ilorazem jest  $\ell_\infty$ .

Wyniki te uzyskane zostały wspólnie ze Zdenkiem Silberem.

## TWIERDZENIE KAKUTANIEGO I ZBIORY RAMSEYA

**Andrzej Kryczka**

Instytut Matematyki UMCS

e-mail: [andrzej.kryczka@umcs.pl](mailto:andrzej.kryczka@umcs.pl)

Jednym z klasycznych wyników geometrii przestrzeni Banacha jest twierdzenie Kakutaniego, które pokazuje, że każda jednostajnie wypukła przestrzeń Banacha ma własność Banacha–Saksa, tj. każdy ograniczony ciąg elementów takiej przestrzeni zawiera podciąg sumowalny w sensie Cesàro.

Oryginały dowód Kakutaniego opiera się w głównej mierze o wnioski płynące z twierdzenia Hahna–Banacha. W referacie zaprezentujemy dowód wykorzystujący zbiory Ramseya. Rozważać będziemy pewną topologię w zbiorze wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych, dla której zastosujemy twierdzenie Galvina–Prikrego mówiące, że każdy zbiór borelowski jest zbiorem Ramseya. Kluczową rolę odegra tutaj pewien proces uzyskiwania zbiorów borelowskich w zbiorze indeksów dodatnio rozseparowanych ciągów słabo zbieżnych, który ostatecznie doprowadzi do podciągu sumowalnego w sensie Cesàro.

[1] F. Galvin, K. Prikrý, Borel sets and Ramsey's theorem, *J. Symbolic Logic*, 1973, 38(2), 193–198

[2] S. Kakutani, Weak convergence in uniformly convex spaces, *Tohoku Math. J.*, 1938, 45, 188–193

[3] F.P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1930, 30, 264–286

## NAJNOWSZE REZULTATY O PROJEKCJACH MINIMALNYCH

Grzegorz Lewicki

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska  
e-mail:

Niech  $X$  będzie przestrzenią Banacha a  $Y \subset X$  jej skończenie wymiarową podprzestrzenią. Oznaczmy przez  $\mathcal{P}(X, Y)$  zbiór wszystkich liniowych i ciągłych projekcji z  $X$  do  $Y$ . Przypomnijmy że operator  $P: X \rightarrow Y$  nazywamy *projekcją* na  $Y$  jeżeli  $P|_Y = \text{Id}_Y$ . Zdefiniujemy *względna stałą projekcji* przestrzeni  $Y$  jako

$$\lambda_{\mathbb{K}}(Y, X) := \inf\{\|P\| : P \in \mathcal{P}(X, Y)\},$$

*absolutną stałą projekcji* przestrzeni  $Y$  wzorem

$$\lambda_{\mathbb{K}}(Y) := \sup\{\lambda(Y, X) : Y \subset X\} \tag{1}$$

oraz *maksymalną absolutną stałą projekcji* wzorem

$$\lambda_{\mathbb{K}}(m) := \sup\{\lambda(Y) : \dim(Y) = m\}.$$

Celem mojego wystąpienia jest zaprezentowanie najnowszych rezultatów dotyczących powyżej zdefiniowanych stałych udowodnionych przeze mnie oraz moich współpracowników z Krakowa.

[1] B. L. Chalmers, G. Lewicki, *Three-dimensional subspace of  $l_{\infty}^{(5)}$  with maximal projection constant*, *J. Funct. Anal.*, 257/2 (2009), 553–592.

[2] B. L. Chalmers, G. Lewicki, *A proof of the Grünbaum conjecture*, *Studia Math.*, 200 (2010), 103–129.

[3] G. Lewicki, M. Prophet, *The Chalmers-Metcalf Operator and Minimal Extensions*, *J. Funct. Analysis Vol.*, 280 (2021), no. 1, 1-30.

[4] B. Deręgowska, M. Fickus, S. Foucart, B. Lewandowska, *On the value of the fifth maximal projection constant*, *J. Funct. Anal.*, 283 (2022), no. 10.

[5] B. Deręgowska, B. Lewandowska, *A simple proof of the Grünbaum conjecture*, *J. Funct. Anal.*, 285 (2023), no. 2.

POCHODNE LIPSCHITZA FUNKCJI TYPU TAKAGI-VAN DER WAERDENA  
W PRZESTRZENIACH METRYCZNYCH

**Oleksandr Maslyuchenko**

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach  
e-mail: ovmasl@gmail.com

**Ziemowit Wójcicki**

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach  
e-mail: ziemo1@onet.eu

Duża i mała pochodna Lipschitza funkcji  $f: X \rightarrow Y$  dla przestrzeni metrycznych  $(X, d)$  i  $(Y, \varrho)$  są określone wzorami

$$\begin{aligned} \text{Lip } f(x) &= \limsup_{u \rightarrow x} \frac{1}{d(u,x)} \varrho(f(u), f(x)) = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \sup_{d(u,x) < r} \frac{1}{r} \varrho(f(u), f(x)), \\ \text{lip } f(x) &= \liminf_{r \rightarrow 0^+} \sup_{d(u,x) < r} \frac{1}{r} \varrho(f(u), f(x)) \quad \text{dla dowolnego } x \in X. \end{aligned}$$

Dla funkcji rzeczywistych duża pochodna Lipschitza pojawiła się po raz pierwszy w 1923 roku w uogólnieniu Stepanoffa rezultatu Rademachera, który orzeka, że każda funkcja ciągła  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna prawie wszędzie na dopełnieniu do zbioru  $L^\infty(f) = (\text{Lip } f)^{-1}(+\infty)$ . Balogh i Csörnyei w 2006 roku pokazali, że nie możemy zamienić zbioru  $L^\infty(f)$  na  $\ell^\infty(f) = (\text{lip } f)^{-1}(+\infty)$  w twierdzeniu Stepanoffa, natomiast Z. Buczolicz, B. Hanson, M. Rmoutil, T. Zürcher w 2019 roku udowodnili, że każdy  $F_\sigma$  lub  $G_\delta$  zbiór  $E \subseteq \mathbb{R}$  jest równy  $\ell^\infty(f)$  dla pewnej funkcji ciągłej  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Całkiem niedawno, bo w 2024 roku, Rmoutil i Zürcher otrzymali podobny rezultat dla  $F_{\sigma\delta}$  zbiorów miary zero. Z drugiej strony, nietrudno pokazać, że zbiór  $\ell^\infty(f)$  musi być typu  $F_{\sigma\delta}$  ale nie musi być miary zero. Wobec tego problem charakteryzacji zbiorów  $\ell^\infty(f)$  dla funkcji ciągłych pozostaje otwarty nawet dla funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej.

Naszym celem jest konstrukcja funkcji ciągłych na ogólnych przestrzeniach metrycznych, dla których  $\ell^\infty(f)$  (lub  $L^\infty(f)$ ) pokrywa się z całą przestrzenią. Głównym narzędziem jest uogólnienie klasycznej konstrukcji wszędzie nieróżniczkowalnej funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Klasyczna funkcja Takagi-van der Waerdena typu  $a > 1$  jest określona wzorem  $f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d(x, \frac{1}{a^n} \mathbb{Z})$ , gdzie  $d(x, E) = \inf_{y \in E} |x - y|$  dla  $x \in \mathbb{R}$  i  $E \subseteq \mathbb{R}$ . My zamieniamy zbiór  $\frac{1}{a^n} \mathbb{Z}$  na maksymalny  $\frac{1}{a^n}$ -oddzielny podzbiór  $S_n$  przestrzeni metrycznej  $X$  i dodając parametr  $b < a$  określamy funkcję Takagi-van der Waerden typu  $(a, b)$  (krotko TW-funkcję typu  $(a, b)$ ) jako  $f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n d(x, S_n)$ ,  $x \in X$ . Dalej, udowodniamy że  $\text{Lip } f_{a,b} = +\infty$  dla  $a > b > 2$  jeśli  $X$  nie ma punktów izolowanych. Ponadto, w przypadku gdy powłokowa porowatość  $p^s(X, x) \leq \lambda < 1$  dla dowolnego  $x \in X$  (np. dla przestrzeni unormowanej  $X$ ), otrzymujemy, że  $\text{lip } f_{a,b} = +\infty$  dla niektórych  $a > b \geq 1$ . Dowody wskazanych faktów można znaleźć w naszym preprintcie [1].

[1] O. Maslyuchenko, Z. Wójcicki, Takagi-van der Waerden functions in metric spaces and its Lipschitz derivatives, *preprint*, ArXiv:2406.05684

## KOMBINATORYCZNE PRZESTRZENIE BANACHA

**Anna Pelczar-Barwacz**  
Uniwersytet Jagielloński  
e-mail: [anna.pelczar@uj.edu.pl](mailto:anna.pelczar@uj.edu.pl)

Pojęcie "kombinatorycznych przestrzeni Banacha", pochodzące z blogu W.T.Gowersa, odnosi się do szerokiej klasy przestrzeni ciągowych, obejmującej zarówno klasyczne przestrzenie  $c_0$ ,  $\ell_1$ , jak i przestrzenie Schreiera dowolnego rzędu i uniwersalną przestrzeń Pełczyńskiego z uniwersalną bazą bezwarunkową. Klasa ta jest badana intensywnie pod kątem własności geometrycznych samych przestrzeni oraz struktury algebry operatorów ograniczonych na nich, jest również źródłem szeregu przykładów dotyczących hipotez w teorii geometrii przestrzeni Banacha.

Podczas referatu omówię definicję, podstawowe własności oraz przykłady przestrzeni kombinatorycznych. Referat będzie oparty na pracach [1,2].

[1] C. Brech, V. Ferenczi, A. Tcaciuc, Isometries of combinatorial Banach spaces , *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2020, 148(11), 4845–4854

[2] P. Borodulin-Nadzieja, B. Farkas, S. Jachimek, A. Pelczar-Barwacz, The ZOO of combinatorial Banach spaces, *preprint*, ArXiv:2404.01733

[3] R.M. Causey, A. Pelczar-Barwacz, Equivalence of block sequences in Schreier spaces and their duals, *preprint*, ArXiv:2311.00761

PRZESTRZENIE  $\ell_1$ -PREDUALNE ZAWIERAJĄCE PRAWIE IZOMETRYCZNE  
KOPIE PRZESTRZENI  $c$

**Łukasz Piasecki**

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej  
e-mail: lukasz.piasecki@mail.umcs.pl

Niech  $X$  będzie przestrzenią  $\ell_1$ -predualną oraz  $B_X$  jej domkniętą kulą jednostkową. Zippin [2] wykazał, że jeśli  $B_X$  ma punkt ekstremalny, to dla każdego  $\varepsilon > 0$  przestrzeń  $X$  zawiera  $(1 + \varepsilon)$ -komplementarną podprzestrzeń, która jest  $(1 + \varepsilon)$ -izomorficzna z przestrzenią  $c$  ciągów zbieżnych.

Scharakteryzujemy wszystkie przestrzenie  $\ell_1$ -predualne mające powyższą własność. Referat będzie oparty na pracy [1].

[1] E. Casini, E. Miglierina, Ł. Piasecki, Subspaces of  $\ell_1$ -preduals:  $W_\alpha$  everywhere, *preprint*, ArXiv:2401.04819

[2] M. Zippin, Correction to “On some subspaces of Banach spaces whose duals are  $L_1$  spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2018, 146, 5257–5262.

## DOPEŁNIALNE PODPRZESTRZENIE $C(K \times L)$

**Grzegorz Plebanek**

Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

e-mail: grzegorz.plebanek@math.uni.wroc.pl

Podczas gdy  $C(\beta\omega)$  jest klasycznym przykładem przestrzeni Grothendiecka,  $C(\beta\omega \times \beta\omega)$  zawiera dopełnialną kopię  $c_0$ , co jest konsekwencją wyników Cembranosy i Freniche. Alspach i Galego [1] zapytali, czy  $C(\beta\omega \times \beta\omega)$  zawiera dopełnialne kopie innych ośrodkowych przestrzeni Banacha.

Nasz rezultat implikuje, że  $C(\beta\omega \times \beta\omega)$  zawiera dopełnialną podprzestrzeń izomorficzną z  $C[0, 1]$ . W istocie dowodzimy, że  $C[0, 1]$  zanurza się w sposób dopełnialny w każdą przestrzeń postaci  $C(K \times L)$ , gdzie  $K$  i  $L$  są nierozproszonymi przestrzeniami zwartymi.

Wyniki wspólne z **Jakubem Rondošem** i **Damianem Sobotą**.

[1] D.E. Alspach, E.M. Galego, Geometry of the Banach spaces  $C(\beta\mathbb{N} \times K, X)$ , *Studia Math.*, 2011, 207(2), 153–180.



## BAZY FILTROWE W PRZESTRZENIACH BANACHA

Jarosław Swaczyna

Politechnika Łódzka

e-mail: jaroslaw.swaczyna@p.lodz.pl

Niech  $\mathcal{F}$  będzie filtrem na  $\mathbb{N}$ . Mówimy, że ciąg  $(x_n)$  jest  $\mathcal{F}$ -zbieżny do  $x$ , jeżeli dla każdego  $\varepsilon > 0$  zachodzi  $\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$ . Ciąg  $(e_n)$  nazywamy  $\mathcal{F}$ -bazą przestrzeni Banacha  $X$ , jeżeli dla każdego  $x \in X$  istnieje dokładnie jeden taki ciąg skalarów  $(\alpha_n)$ , że  $\sum_{\mathcal{F}} \alpha_n e_n = x$ , gdzie przez  $\sum_{\mathcal{F}}$  rozumiemy  $\mathcal{F}$ -granice ciągu sum częściowych. Podczas referatu przedstawię podstawowe własności baz filtrowych, przykłady w wybranych przestrzeniach Banacha i możliwości zastosowań do charakteryzacji filtrów.

- [1] J. Connor, M. Ganichev, and V. Kadets, A characterization of Banach spaces with separable duals via weak statistical convergence, *J. Math. Anal. Appl.*, 2000, 244, 251–261.
- [2] M. Ganichev, and V. Kadets, Filter convergence in Banach spaces and generalized bases, in: *General Topology in Banach Spaces*, T. Banach (ed.), Nova, 2001, 61–69
- [3] T. Kochanek,  $\mathcal{F}$ -bases with brackets and with individual brackets in Banach spaces, *Studia Math.*, 2012, 211, 259–268.
- [4] N. de Rancourt, T. Kania, J. Swaczyna, Continuity of coordinate functionals of filter bases in Banach spaces, *Journal of Functional Analysis*, 2023, 284(9), Paper No. 109869, 9 pp.
- [5] T. Kania, J. Swaczyna, Large cardinals and continuity of coordinate functionals of filter bases in Banach spaces, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2021, 53(1), 231–239.
- [6] A. Kwela, J. Swaczyna, Zoo of ideal Schauder basis, *preprint*, 2024+

## O STAŁYCH SPEKTRALNYCH W PRZESTRZENIACH BANACHA

**Michał Wojtylak**

Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytetu Jagiellońskiego  
e-mail: `michal.wojtylak@uj.edu.pl`

W przestrzeni Hilberta zachodzi nierówność von Neumanna

$$\|p(A)\| \leq \sup_{|z| \leq 1} |p(z)|,$$

gdzie  $\|A\| \leq 1$ . Nierówność ta uogólniona na wiele możliwości. W szczególności istotne są badania na temat zbiorów spektralnych, tj. zbiorów  $\Omega$ , takich, że

$$\|p(A)\| \leq C \sup_{z \in \Omega} |p(z)|,$$

gdzie  $C$  jest pewną stałą, potencjalnie zależną od  $A$ . Nierówność von Neumanna mówi, iż koło o środku w zerze i promieniu  $\|A\|$  jest zbiorem spektralnym dla  $A$  (ze stałą  $C = 1$ ).

Wiadomo, iż rezultat tego typu nie jest prawdziwy w dowolnej przestrzeni Banacha, innymi słowy, nie każdy operator jest wielomianowo ograniczony. Pomimo to przedstawimy pewne rezultaty dotyczące zbiorów spektralnych w przestrzeniach Banacha związanych z (algebraicznym) obrazem numerycznym.

Współautorzy projektu: Hanna Blazhko (UJ), Daniil Homza(UJ), Jens de Vries (TU TWeente), Felix Schwenninger (TU TWeente).

# Równania różniczkowe cząstkowe

ORGANIZATORZY:

ANETA WRÓBLEWSKA-KAMIŃSKA (IM PAN)

ASYMPTOTYCZNE ZACHOWANIE ROZWIĄZAŃ EWOLUCYJNEGO  
RÓWNANIA  $p$ -LAPLACE'A DLA  $1 < p < 2$

**Iwona Chlebicka**

Uniwersytet Warszawski

e-mail: [i.chlebicka@mimuw.edu.pl](mailto:i.chlebicka@mimuw.edu.pl)

Opowiem o ostatnio uzyskanych wynikach dotyczących zagadnienia Cauchy'ego dla ewolucyjnego równania  $p$ -Laplace'a w zakresie  $1 < p < 2$  odpowiadającym szybkiej dyfuzji. Główne wyniki pracy [1] dotyczą relaksacji do samopodobieństwa dla rozwiązań przy przejściu z czasem do nieskończoności. Bardziej szczegółowo – dla danych początkowych o konkretnie wyrażonej bliskości do pewnego rozwiązania samopodobnego pokazujemy jak szybko rozwiązanie doń zbiega. Istotnym wyzwaniem jest fakt, iż w przedziale  $1 < p < 2$  nasze zagadnienie kilkakrotnie zmienia swoje własności i dowody w różnych podprzedziałach wymagały różnych pomysłów.

[1] M. Bonforte, I. Chlebicka, N. Simonov, Refined asymptotics for the Cauchy problem for the fast  $p$ -Laplace evolution equation, *preprint*, ArXiv:2405.05405

## MECHANICZNE MODELE WZROSTU TKANEK

Tomasz Dębiec

Uniwersytet Warszawski

e-mail: t.debiec@mimuw.edu.pl

W oparciu o mechaniczny punkt widzenia, zgodnie z którym żywe tkanki wykazują cechy charakterystyczne dla płynów, układy równań różniczkowych cząstkowych inspirowane dynamiką płynów są obecnie jednym z głównych narzędzi matematycznych do makroskopowego opisu wzrostu tkanek. W zależności od rodzaju tkanki, modele te łączą ciśnienie z polem prędkości za pomocą prawa Brinkmana (modele lepkosprężyste) lub prawa Darcy’ego (równania ośrodka porowatego). Co więcej, „sztywność” prawa ciśnienia odgrywa kluczową rolę w rozróżnianiu modeli opartych na gęstości (ściśliwych) od problemów ze swobodnym brzegiem (nieściśliwych), w których występuje wysycenie gęstości.

Wykład ma na celu przedstawienie sposobów powiązania różnych mechanicznych modeli żywych tkanek poprzez przejścia asymptotyczne. W szczególności zajmiemy się tzw. nieściśliwą granicą od równań makroskopowych do zagadnień o swobodnym brzegu typu Hele-Shaw. Referat jest oparty na pracach [1, 2, 3, 4].

[1] T. Dębiec, M. Schmidtchen, Incompressible limit for a two-species tumour model with coupling through Brinkman’s law in one dimension, *Acta Applicandae Mathematicae*, 2020, 169(1), 593–611

[2] T. Dębiec, B. Perthame, M. Schmidtchen, N. Vauchelet, Incompressible limit for a two-species tumour model with coupling through Brinkman’s law in any dimension, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2021, 145, 204–239

[3] N. David, T. Dębiec, B. Perthame, Convergence rate for the incompressible limit of nonlinear diffusion-advection equations, *Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire*, 2023, 40(3), 511–529

[4] N. David, T. Dębiec, M. Mandal, M. Schmidtchen, A Degenerate Cross-Diffusion System as the Inviscid Limit of a Nonlocal Tissue Growth Model, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2024, 56(2), 2090–2114

HIPERBOLICZNE RÓWNANIE SWIFTA-HOHENBERGA W  $\mathbb{R}^N$ 

**Maria Kania-Błaszczyk**  
Uniwersytet Śląski  
e-mail: maria.kania@us.edu.pl

**Radosław Czaja**  
Uniwersytet Śląski  
e-mail: radoslaw.czaja@us.edu.pl

Rozważmy równanie czwartego rzędu postaci

$$\sigma u_{tt} + u_t + \Delta^2 u + \gamma \Delta u + \delta u = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \quad (1)$$

gdzie  $\sigma > 0$ ,  $\delta \geq 0$  i  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Równanie będziemy badać wraz z warunkami początkowymi

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = v_0. \quad (2)$$

Równanie (1) jest hiperboliczną modyfikacją równania Swifta-Hohenberga

$$u_t + (q_0^2 I + \Delta)^2 u = \alpha u - u^3 \quad (3)$$

opisującego wzór tworzenia się komórek w konwekcji Rayleigha-Bénarda (patrz [1]). Zagadnienie (1)-(2) zbadamy na gruncie teorii półgrup ([3, str. 56-58]. Pokażemy, że półgrupa generowana przez ten problem ma globalny atraktor w przestrzeni  $H^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$  (patrz [2])

[1] P. C. Hohenberg, J. B. Swift, Effects of additive noise at the onset of Rayleigh-Bénard convection, *Phys. Rev. A*, 1992 (46), 4773-4785

[2] R. Czaja, M. Kania, Global attractor for hyperbolic modified Swift-Hohenberg equation in  $\mathbb{R}^N$ , w *recenzji*,

[3] T. Cazenave, A. Haraux, An Introduction to Semilinear Evolution Equations, *Clarendon Press*, 1998

TEMPO ZBIEŻNOŚCI ALGORYTMU CZĄSTECZKOWEGO DLA RÓWNIANIA  
OŚRODKA GRANULARNEGO

**Matej Benko**

Brno University of Technology  
e-mail: matej.benko@vutbr.cz

**Iwona Chlebicka**

Uniwersytet Warszawski  
e-mail: i.chlebicka@mimuw.edu.pl

**Jørgen Endal**

Norwegian University of Science and Technology  
e-mail: jorgen.endal@ntnu.no

**Błażej Miasojedow**

Uniwersytet Warszawski  
e-mail: b.miasojedow@mimuw.edu.pl

Przedstawimy wyniki dotyczące tempa zbieżności algorytmu cząsteczkowego służącego do numerycznego rozwiązywania równania postaci

$$\partial_t \mu = \operatorname{div}(\mu \nabla V) + \operatorname{div}(\mu \nabla W * \mu) + \Delta \mu$$

dla szerokiej klasy potencjałów  $V$  i  $W$ . Referat będzie oparty na wynikach pracy [1].

[1] Matej Benko, Iwona Chlebicka, Jørgen Endal, Błażej Miasojedow, Convergence rates of particle approximation of forward-backward splitting algorithm for granular medium equations, *preprint*, arXiv:2405.18034

REGULARNOŚĆ ROZWIĄZAŃ DLA STATYCZNEGO, ZRELAKSOWANEGO  
MODELU MIKROMORFICZNEGO

Sebastian Owczarek

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska

e-mail: [sebastian.owczarek@pw.edu.pl](mailto:sebastian.owczarek@pw.edu.pl)

W referacie zostaną przedstawione badania dotyczące problemów matematycznych w mechanice metamateriałów, które znajdują zastosowanie w ochronie sejsmicznej, maskowaniu akustycznym oraz kontroli termicznej. Analiza tych problemów zostanie przeprowadzona z perspektywy mechaniki kontinuum, wykorzystując niedawno wprowadzone uogólnione kontinuum, znane jako zrelaksowany model mikromorficzny. Model ten łączy liniową elastyczność z macierzowym równaniem typu Maxwella.

Z matematycznego punktu widzenia, regularność rozwiązania dla zrelaksowanych układów mikromorficznych stanowi interesujący temat, ponieważ układ równań opisujących deformacje metamateriałów jest dobrze zdefiniowany w przestrzeni

$$H(\text{Curl}; \Omega) = \{P \in L^2(\Omega) \mid \text{Curl } P \in L^2(\Omega)\}$$

dla mikroniekształcen  $P$ , a energia dyslokacji nie kontroluje wszystkich słabych pochodnych tensora  $P$  w  $L^2(\Omega)$ . W przypadku dynamicznym regularność tensora  $P$  można udowodnić stosunkowo łatwo (odsyłamy czytelnika do [1]). Wykorzystując standardowy pomysł oparty na ilorazach różnicowych, wykazano  $H^1_{\text{loc}}$ -regularność dla tensora mikroniekształceń  $P$ . Było to związane z faktem, że całkowita energia układu dynamicznego zawiera również energię kinematyczną.

Okazuje się jednak, że w przypadku statycznym uzyskanie wyższej regularności tensora  $P$  jest znacznie bardziej skomplikowane, a standardowe podejście różnic skończonych nie jest skuteczne. Głównym pomysłem na obejście tego problemu jest zastąpienie standardowych ilorazów różnicowych różnicami skończonymi opartymi na wariacjach wewnętrznych, obejmującymi zmodyfikowaną transformację Pioli dla tensora mikroniekształcenia  $P$  (więcej szczegółów można znaleźć w artykułach [2], [3] oraz [4]).

Podczas mojego referatu zaprezentuję główne wyniki z artykułów [2], [3] oraz [4], dotyczące  $H^1$ -regularności dla tensora mikroniekształcenia  $P$ . Uzyskana regularność ma istotne znaczenie praktyczne, ponieważ pozwala na proste zastosowanie standardowych skończonych elementów  $H^1$  w gładkich przypadkach, unikając konieczności bardziej skomplikowanej implementacji elementów Nédélec -  $H(\text{Curl}; \Omega)$ .

[1] S. Owczarek, I.-D. Ghiba, P. Neff, A note on local higher regularity in the dynamic linear relaxed micromorphic model, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, 44(18), 13855-13865.

[2] D. Knees, S. Owczarek, P. Neff, A local regularity result for the relaxed micromorphic model based on inner variations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2023, 519(2), 126806.

[3] D. Knees, S. Owczarek, P. Neff, A global higher regularity result for the static relaxed micromorphic model on smooth domains, *preprint*, arXiv:2307.02621, Accepted in Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 2024.

[4] D. Knees, S. Owczarek, P. Neff, Global regularity for a physically nonlinear version of the relaxed micromorphic model on Lipschitz domains, *preprint*, arXiv:2403.17451v1, 2024.



SŁABE ROZWIĄZANIA STACJONARNEGO RÓWNANIA NAVIERA–STOKESA  
DLA ŚCIŚLIWYCH PŁYNÓW NIENEWTONOWSKICH

**Maja Szlenk**

Uniwersytet Warszawski  
e-mail: [m.szlenk@uw.edu.pl](mailto:m.szlenk@uw.edu.pl)

Opowiem o moich ostatnich wynikach, otrzymanych we współpracy z Cosminem Burtea [1]. Pokazujemy istnienie słabych rozwiązań stacjonarnego, ściśliwego równania Naviera–Stokesa dla płynów nienewtonowskich. Nasze założenia uwzględniają klasę płynów, dla których tensor naprężeń jest proporcjonalny do  $|\mathbb{D}u|^{r-2}\mathbb{D}u$  dla pewnego  $r > 1$  zależnego od wymiaru, gdzie  $\mathbb{D}u$  oznacza symetryczny gradient wektora prędkości.

[1] C. Burtea, M. Szlenk, Weak solutions to the Navier-Stokes equations for steady compressible non-Newtonian fluids, *preprint*, arXiv:2401.05328

PŁYNY ŚCIŚLIWE NA OBSZARACH ZMIENNYCH W CZASIE

**Aneta Wróblewska-Kamińska**

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: awrob@impan.pl

Przedmiotem naszych rozważań jest ściśliwy płyn w obszarze, który może zmieniać kształt w czasie. Przepływ ośrodka opisany jest układem Naviera-Stokesa-Fouriera. Koncentrujemy się na istnieniu słabych warjacyjnych rozwiązań dla systemu z warunkiem poślizgu dla pola prędkości i zachowawczym warunkiem dla przepływu ciepła. Wspomnę również o strategii dla warunku bez poślizgu. Dowód istnienia rozwiązań oparty jest o konstrukcję odpowiedniej penalizacji/aproksymacji. Przedstawię również rezultat dotyczący analizy układu względem małej liczby Macha.

Rezultat ten jest oparty o wspólne prace z O. Kreml, V. Machá, Š. Nečasová i jest częścią świeżej monografii: *Mathematical theory of compressible fluids on moving domains* (O. Kreml, V. Mácha, S. Nečasová, T. Piasecki).

DYFUZJA I ADWEKCJA W MODELACH POPULACYJNYCH TYPU  
LOTKI-VOLTERRY

Dariusz Wrzosek

Uniwersytet Warszawski

e-mail: darekw@mimuw.edu.pl

Rozważamy układ równań opisujący oddziaływania dwóch populacji o gęstościach  $N$  i  $P$  określonych na obszarze ograniczonym  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  o gładkim brzegu

$$\begin{aligned} N_t &= D_n \Delta N + \nabla \cdot (\mu(N) \nabla P) + \alpha_1 N - \alpha_2 N^2 - \alpha_3 NP, \\ P_t &= D_p \Delta P + \beta_1 P - \beta_2 P^2 + \beta_3 NP. \end{aligned}$$

Układ uzupełniają warunki początkowe z przestrzeni Sobolewa  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $p > n$ , i jednorodne warunki brzegowe typu Neumanna. Współczynniki  $D_n, D_p$  są stałymi dyfuzji.

Drugi człon po prawej stronie w pierwszym równaniu oznacza adwekcję w kierunku przeciwnym do gradientu gęstości  $P$  i odpowiada, w zależności od sytuacji, strategii unikania drapieżnika lub konkurenta. Alternatywnie ze względu na znak  $+$  może być on nazwany jako człon taksji odpychającej. Funkcja

$$\mu(N) = \frac{\chi N}{1 + \sigma N}$$

opisuje tłumienie prędkości zależne od gęstości, a  $\chi > 0$  jest współczynnikiem czułości taksji. Człony kinetyczne mają interpretację taką jak w klasycznym układzie Lotki-Volterra i jedyne założenia które przyjmujemy, są następujące:  $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3 > 0$ . Jeśli chodzi o globalne istnienie rozwiązań, możemy założyć, że  $\alpha_1 = \alpha_1(N, P)$  i  $\beta_1 = \beta_1(N, P)$  są gładkimi funkcjami ograniczonymi. Znak współczynnika  $\beta_3$  odgrywa kluczową rolę. Jego dodatniość odpowiada interakcji typu drapieżnik-ofiara prowadząc do istotnych problemów matematycznych związanych z istnieniem globalnych klasycznych rozwiązań, natomiast przypadek  $\beta_3 < 0$  odnosi się do przypadku konkurencji międzygatunkowej i wtedy  $N$  i  $P$  oznaczają gęstości populacji konkurentów. Dla przypadku drapieżnik-ofiara ( $\beta_3 > 0$ ) i wymiaru przestrzennego  $n = 2$  lub w przypadku konkurencji ( $\beta_3 < 0$ ) i  $n = 3$  tłumienie prędkości ( $\sigma > 0$ ) okazuje się warunkiem wystarczającym dla zapobieżenia wybuchowi rozwiązania w czasie skończonym. Ponadto tłumienie prędkości można pominąć ( $\sigma = 0$ ) dla przypadku modelu konkurencji gdy  $n \leq 2$ . Z symulacji numerycznych wynika, że tłumienie prędkości wydaje się być także wymogiem koniecznym dla zapobieżenia wybuchu rozwiązania w przypadku układu drapieżnik-ofiara w wymiarze przestrzennym  $n = 2$ . Prócz istnienia globalnych klasycznych rozwiązań zajmujemy się także powstawaniem wzorców przestrzennych. Referat będzie oparty głównie na pracy [1] i odnosił się do prac [2]-[4].

[1] P. Mishra, D.W., The role of repulsive taxis in Lotka-Volterra-type models of predation and competition in space dimension  $n > 1$ , w *przygotowaniu*,

[2] P. Mishra, D.W., Pursuit-evasion dynamics for Bazykin-type predator-prey model with indirect predator taxis, *J. Diff. Eq.*, 2023,361, 391–416

[3] P. Mishra, D.W., Repulsive chemotaxis and predator evasion in predator-prey models with diffusion and prey-taxis., *Math. Models. Methods in Nonlin. Sciences*, 2022, 32, 11–42

[4] P. Mishra, D.W., Schoener-Polis-Holt's model of the intraguild predation with predator taxis and repulsive chemotaxis, *DCDS-B*, doi:10.3934/dcdsb.2024062



# Rzeczywista geometria algebraiczna i zagadnienia pokrewne

ORGANIZATORZY:

MARCIN BILSKI (UJ), WOJCIECH KUCHARZ (UJ)

APROKSYMACJA I INTERPOLACJA ODWZOROWAŃ W ROZMAITOŚCI  
JEDNOSTAJNIE RETRAKCYJNIE WYMIERNE

**Juliusz Banecki**

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: [juliusz.banecki@student.uj.edu.pl](mailto:juliusz.banecki@student.uj.edu.pl)

W referacie opowiem o pewnym wzmocnieniu wyników pracy [1] w preprincie [2]. Dotyczy ono możliwości aproksymacji odwzorowań ciągłych między rozmaitościami algebraicznymi rzeczywistymi  $f : X \rightarrow Y$  odwzorowaniami regularnymi relatywnie do podrozmaitości  $Z$  rozmaitości  $X$ . Okazuje się, że taka możliwość zachodzi przy pewnych założeniach o klasie homotopii  $f$  oraz o rozmaitościach  $Y$  i  $Z$ . Własność, którą  $Y$  musi spełniać aby aproksymacja była możliwa (będąca analogiem własności „malleable” wprowadzonej w [1]) jest lokalna i prosta w sformułowaniu. Opowiem także o pewnych konsekwencjach głównego twierdzenia niezwiązanych z aproksymacją.

[1] J. Bochnak, W. Kucharz, On approximation of maps into real algebraic homogeneous spaces (with an appendix by János Kollár), *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 161 (2022) 111–134

[2] J. Banecki, Relative Stone-Weierstrass theorem for maps between varieties, *preprint*, 2024

APROKSYMACJA ODWZOROWAŃ RÓŻNICZKOWALNYCH O WARTOŚCIACH  
W ZBIORACH ALGEBRAICZNYCH**Marcin Bilski**Instytut Matematyki,  
Uniwersytet Jagielloński  
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków  
e-mail: marcin.bilski@im.uj.edu.pl

Niech  $M \subset \mathbb{R}^n$  będzie podzbiorem zwartym, a  $V \subset \mathbb{R}^m$  nieosobliwym podzbiorem algebraicznym. Odwzorowanie  $f = (f_1, \dots, f_m) : M \rightarrow V$  nazywamy regularnym jeśli dla każdej składowej  $f_i$  istnieją  $P_i, Q_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  takie, że  $Q_i$  nie znika w żadnym punkcie zbioru  $M$  oraz  $f_i(x) = P_i(x)/Q_i(x)$  dla każdego  $x \in M$ .

Mówimy, że odwzorowanie  $g : M \rightarrow V$  jest klasy  $\mathcal{C}^k$ , jeśli jest ono zacieśnieniem odwzorowania  $U \rightarrow V$  klasy  $\mathcal{C}^k$  (w zwykłym sensie), określonego na otoczeniu otwartym  $U$  zbioru  $M$  w  $\mathbb{R}^n$ . Zbiór  $\mathcal{C}^k(M, V)$  odwzorowań z  $M$  do  $V$  klasy  $\mathcal{C}^k$  można wyposażyć w  $\mathcal{C}^k$  topologię będącą uogólnieniem zwarto-otwartej  $\mathcal{C}^k$  topologii dobrze znanej, gdy  $M$  jest dodatkowo rozmaitością gładką.

Wiadomo, że aproksymacja odwzorowań  $M \rightarrow V$  klasy  $\mathcal{C}^k$  odwzorowaniami regularnymi w  $\mathcal{C}^k$  topologii na ogół nie jest możliwa (nawet w bardzo prostych przypadkach, np. gdy  $V$  jest sferą jednostkową w  $\mathbb{R}^m$ ). Sytuacja znacząco poprawia się jeśli aproksymację wykonamy przy pomocy odwzorowań  $M \rightarrow V$  powstałych przez sklejenie skończonej liczby odwzorowań regularnych określonych na podzbiórach dziedziny  $M$ . Opowiem o wynikach dotyczących takiej właśnie aproksymacji, uzyskanych wspólnie z Wojciechem Kucharzem.

## WIELOMIANY ZALEŻNE OD WSPÓŁCZYNNIKÓW PARAMETRYZACJI PUISEUX

**Beata Gryszka**

Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie  
e-mail: bhejmej1f@gmail.com

Niech  $\Gamma$  będzie kielkiem nierozkładalnej zespolonej analitycznej krzywej płaskiej w początku układu współrzędnych. Wtedy  $\Gamma$  może być opisany na dwa sposoby: za pomocą parametryzacji  $x = t^n, y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$  lub za pomocą równania  $f(x, y) = 0$ , gdzie  $f = \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}[[x]][y]$  jest wielomianem Weierstrassa stopnia  $n$ . Współczynniki  $c_{ij}$  są wielomianami od współczynników  $a_k$ , zatem każdy wielomian zależny od współczynników  $c_{ij}$  może być zapisany jako wielomian od współczynników  $a_k$ . W referacie zaprezentujemy częściowy wynik odwrotny, tzn. pokażemy, że każdy wielomian  $Q(a_1, a_2, \dots)$  spełniający pewne naturalne założenia może zostać zapisany jako funkcja wymierna zależna od współczynników  $c_{ij}$ .

[1] B. Gryszka, J. Gwoździewicz, Non-degeneracy conditions for plane branches, *preprint*, ArXiv:2303.11300



## O ROZKŁADZIE KRZYWEJ POLARNEJ

**Janusz Gwoździewicz**

Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

e-mail: janusz.gwozdzieicz@up.krakow.pl

Z każdą zespoloną krzywą analityczną oraz krzywą gładką przechodzącymi przez początek układu współrzędnych płaszczyzny zespolonej można związać tak zwaną krzywą polarną. W najprostszym przypadku gdy krzywa analityczna ma równanie  $f(x, y) = 0$  a krzywą gładką jest  $x = 0$ , krzywa polarna zadana jest równaniem  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ . Okazuje się, że w pewnym sensie krzywa polarna dobrze przylega do wyjściowej krzywej. Miarą tego przylegania jest tak zwany kontakt logarytmiczny. Kontakty logarytmiczne pomiędzy składowymi nierozkładalnymi krzywej i krzywej polarnej można zilustrować przy pomocy tak zwanego drzewa Eggersa. Pokażemy przy jakich dodatkowych założeniach rozkład Eggersa zespolonej krzywej polarnej przenosi się na krzywe polarne nad ciałami o dodatniej charakterystyce. Wyniki dotyczące dodatniej charakterystyki zostały uzyskane wspólnie z Ewelią Garcia Barroso i Aną Belen de Felipe.

[1] M. Merle, Invariants polaires des courbes planes, *Invent. Math.*, 1977, 41, 103–111

[2] H. Eggers, Polarvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten, *Bonner Mathematische Schriften*, 1983, 147

[3] E. R. García Barroso, Sur les courbes polaires d'une courbe plane reduite, *Proc. London Math. Soc.*, 2000, 81, 1–28

TESTOWANIE CIĄGŁOŚCI FUNKCJI WYMIERNYCH ZA POMOCĄ  
SPECJALNEJ RODZINY KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH

**Filip Kołomyjec**

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: [filip.kolomyjec@student.uj.edu.pl](mailto:filip.kolomyjec@student.uj.edu.pl)

Niech  $X$  będzie rzeczywistym zbiorem algebraicznym nieosobliwym, spójnym. Funkcję  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy *wymierną ciągłą*, jeśli jest ciągła i przedstawia się jako iloraz wielomianów na podzbiornie otwartym, gęstym w topologii Zariskiego. W 2018 r. Kollár, Kucharz, Kurdyka udowodnili, że warunek ten zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy restrykcja funkcji  $f$  do dowolnej krzywej algebraicznej nierozkładalnej jest wymierna ciągła. Pokażemy, że klasę krzywych testujących można ograniczyć do krzywych homeomorficznych z okręgami, mających najwyżej jeden punkt osobliwy. Uzasadnimy również, że krzywe żadnej klasy  $C^k$  nie są wystarczające.

Referat na podstawie wspólnych wyników uzyskanych z M. Bilskim.

SUMY WYŻSZYCH POTĘG W RZECZYWISTEJ GEOMETRII  
ALGEBRAICZNEJ

Tomasz Kowalczyk

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: tomek.kowalczyk@uj.edu.pl

Niech  $R$  będzie pierścieniem przemiennym z jedyneką oraz niech  $n \in \mathbb{N}$ . Definiujemy  $2n$ -tą liczbę pitagorejską pierścienia  $R$  jako najmniejszą dodatnią liczbę naturalną  $g$ , taką, że dowolna suma  $2n$ -tych potęg da się zapisać jako suma co najwyżej  $g$   $2n$ -tych potęg.

Przypadek  $n = 1$  jest znany w literaturze jako liczba pitagorejska pierścienia (czasem liczba Waringa). 2-ga liczba pitagorejska jest ściśle związana z teorią form kwadratowych, na temat których wiemy bardzo dużo. Problemy pojawiają się, jeśli rozpatrujemy sumy wyższych potęg. Każda forma kwadratowa jest diagonalizowalna i wiadomo, że nie jest to prawdą dla form wyższych stopni. Teoria form wyższych stopni jest znacznie bardziej skomplikowana i znacznie mniej rozwinięta.

Niech  $X \subset \mathbb{R}^n$  będzie nierozkładalnym zbiorem algebraicznym a  $R(X)$  pierścieniem funkcji rzeczywistych określonych na  $X$ . Podczas referatu omówimy główne wyniki oraz problemy związane z liczeniem wyższych liczb pitagorejskich pierścieni. Rozpatrzmy następujące przypadki:  $R(X)$  to ciało funkcji wymiernych na  $X$  [2],  $R(X)$  to pierścień funkcji  $k$ -regulous [1],  $R(X)$  to pierścień współrzędnych zbioru algebraicznego [2,4,6] oraz najnowszy przypadek gdzie  $R(X)$  to pierścień funkcji regularnych [5].

- [1] J. Banecki, T. Kowalczyk, Sums of even powers of  $k$ -regulous functions, *Indagationes Mathematicae*, 2022, 34, 477–487
- [2] E. Becker, The real holomorphy ring and sums of  $2n$ -th powers, *Géométrie algébrique réelle et formes quadratiques, Lecture Notes in Mathematics*, 1981, 959, 139–181.
- [3] K. Błachut, T. Kowalczyk, Sums of squares on hypersurfaces, *Results in Mathematics*, 2024, 79, article number 90
- [4] M-D. Choi, Z.D. Dai, T.Y. Lam, B. Reznick, The Pythagoras number of some affine algebras and local algebras, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1982, 336, 45–82.
- [5] T. Kowalczyk, Theorem of Cassels and sums of squares of regular functions, *preprint*, w przygotowaniu.
- [6] T. Kowalczyk, J. Vill, Sums of even powers of polynomials, *preprint*, ArXiv:2311.07356

TOPOLOGIA PRZESTRZENI RZECZYWISTYCH ODWZOROWAŃ  
REGULARNYCH**Wojciech Kucharz**Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego  
e-mail: Wojciech.Kucharz@im.uj.edu.pl

Dla dowolnych dwóch rzeczywistych rozmaitości algebraicznych  $X$  i  $Y$ , niech  $\mathcal{R}(X, Y)$  oznacza zbiór wszystkich odwzorowań regularnych  $X \rightarrow Y$ . Zbiór  $\mathcal{R}(X, Y)$  będzie traktowany jako podprzestrzeń przestrzeni  $\mathcal{C}(X, Y)$  wszystkich odwzorowań ciągłych  $X \rightarrow Y$ . Przestrzeń  $\mathcal{C}(X, Y)$  jest wyposażona w topologię zwarto-otwartą. Pokażemy, że przy odpowiednich założeniach każda składowa łukowo spójna przestrzeni  $\mathcal{C}(X, Y)$  zawiera co najwyżej jedną składową łukowo spójną przestrzeni  $\mathcal{R}(X, Y)$ , a dla każdej liczby całkowitej  $k \geq 1$  inkluzja  $\mathcal{R}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$  indukuje izomorfizm między  $k$ -tymi grupami homotopii odpowiednich składowych łukowo spójnych. Ponadto, podamy interesujące przykłady, w których inkluzja  $\mathcal{R}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$  jest słabą równoważnością homotopijną. Uzyskane wyniki stanowią znaczące uogólnienie pracy [3]. Kluczowe znaczenie dla dowodów mają nowe prace Juliusza Baneckiego [1] i [2].

[1] J. Banecki, Algebraic homotopy classes, *J. Math. Pures Appl.*, to appear, arXiv:2402.05205, 2024

[2] J. Banecki, Relative Stone-Weierstrass theorem for maps between varieties, *preprint*, 2024

[3] J. Bochnak and W. Kucharz, The homotopy groups of some spaces of real algebraic morphisms, *Bull. London Math. Soc.*, 1993, 25(4), 385–392

PRYNCYPALIZACJA IDEAŁÓW SZEREGÓW FORMALNYCH ZA POMOCĄ  
TRANSFORMACJI ELEMENTARNYCH**Krzysztof Kurdyka**

Université Savoie Mont Blanc, CNRS UMR 5127

e-mail: kurdyka@univ-smb.fr

Niech  $K$  będzie ciałem, odwzorowanie  $\sigma : K^n \rightarrow K^n$  nazywamy *transformacją elementarną*, jeśli po permutacji zmiennych, dla pewnego  $1 < r \leq n$ , jest postaci

$$\sigma(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) = (x_1 x_r, \dots, x_{r-1} x_r, x_r, \dots, x_n).$$

J. Kollár [1] twierdzi, że dowolny ideał w pierścieniu szeregów formalnych nad  $K$ , po podstawieniu odpowiedniego skończonego złożenia transformacje elementarnych staje się ideałem głównym. Dowód podany w [1] odwołuje się do bardzo zaawansowanych metod teorii rozwiązywania osobliwości. Przedstawię elementarny dowód tego twierdzenia.

Następnie wyjaśnię jak to twierdzenie jest zastosowane do głównego wyniku [1], który mówi co następuje. Niech  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  będzie kielkiem funkcji subanalitycznej i łukowo-analitycznej, na przykład kielkiem funkcji wymiernej ciągłej. Jeśli dla każdego ciągu liczb naturalnych  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  wykładniki szeregu  $f(t^{q_1}, \dots, t^{q_n})$  należą do półgrupy generowanej przez  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , to wówczas kielek  $f$  jest analityczny. Wynik ten jest rozwinięciem [2] gdzie analogiczne twierdzenie jest udowodnione dla  $n = 2$ .

[1] , J. Kollár, *Real analytic functions and monomial curves*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 71 (2023), no. 1, 53–63.

[2] , W Kucharz, K Kurdyka, *Analytic functions and Nash functions along curves*, Selecta Mathematica 29 (1), 16 (2023).

FUNKCJE KLASY  $\mathcal{C}^p$  W STRUKTURACH O-MINIMALNYCH

**Rafał Pierzchała**

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: rafal.pierzchala@uj.edu.pl

Przedstawimy pewne rezultaty i przykłady dotyczące klasy  $\mathcal{C}^p$  dla funkcji definiowanych w strukturach o-minimalnych.

## O PEWNEJ EFEKTYWNEJ WERSJI TWIERDZENIA BERTINIEGO

Tomasz Rodak

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. S. Banacha 22, 90-238  
 Łódź  
 e-mail: tomasz.rodak@wmii.uni.lodz.pl

Adam Różycki

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. S. Banacha 22, 90-238  
 Łódź  
 e-mail: adam.rozycki@wmii.uni.lodz.pl

Stanisław Spodzieja

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. S. Banacha 22, 90-238  
 Łódź  
 e-mail: stanislaw.spodzieja@wmii.uni.lodz.pl

Klasyczne twierdzenie Bertiniego o generycznym przecięciu zbioru algebraicznego z hiperpłaszczyznami mówi, że (patrz Twierdzenie 8.18 w książce [2])

**Twierdzenie Bertiniego.** *Niech  $X$  będzie nieosobliwą domkniętą podrozmaitością przestrzeni  $\mathbb{P}_k^n$ , gdzie  $k$  jest ciałem algebraicznie domkniętym. Wtedy istnieje hiperpłaszczyzna  $H \subset \mathbb{P}_k^n$  niezawierająca  $X$  i taka, że schemat  $H \cap X$  jest w każdym punkcie regularny. (Właściwie, jeśli  $\dim X \geq 2$ , to  $H \cap X$  jest spójny, a więc nierozkładalny, a więc  $H \cap X$  jest rozmaitością nieosobliwą). Ponadto zbiór hiperpłaszczyzn o tej własności tworzy otwarty i gęsty podzbiór pełnego systemu liniowego  $|H|$ , rozpatrywanego jako przestrzeń rzutowa.*

Pokażemy, że można efektywnie wskazać skończoną rodzinę hiperpłaszczyzn  $H$ , z których przynajmniej jedna spełnia tezę twierdzenia Bertiniego.

- [1] A. Hashemi, J. Heintz, L.M. Pardo, P. Solernó, On Bézout inequalities for non-homogeneous polynomial ideals, *J. Symbolic Comput.*, 2021, 106, 1–22
- [2] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, *Springer Science+Business Media, Inc.*, 1977
- [3] S.L. Kleiman, Bertini and his two fundamental theorems. Studies in the history of modern mathematics, III, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, 1998, 55, 9–37
- [4] S. Łojasiewicz, Introduction to complex analytic geometry, *Birkhäuser Verlag, Basel*, 1991
- [5] D. Mumford, Algebraic geometry I, Complex projective varieties, *Springer-Verlag*, 1991
- [6] T. Rodak, A. Różycki, S. Spodzieja, Effective Bertini theorem and formulas for multiplicity and the local Łojasiewicz exponent, *Bull. Sci. Math.*, 2021, 173, Paper No. 103066, 27 pp.
- [7] I.R. Shafarevich, Basic algebraic geometry. 1, *Springer, Heidelberg*, 2013
- [8] B. Sturmfels, N.V. Trung, W. Vogel, Bounds on degrees of projective schemes, *Math. Ann.*, 1995, 302(3), 417–432
- [9] O. Zariski, P. Samuel, Commutative Algebra (Vol. I, II), *Van Nostrand, Princeton*, 1958, 1960

## WOKÓŁ HIPOTEZY PULLBACKU

Karolina Zając

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie  
e-mail: karolina99.zajac@uj.edu.pl

Rozważmy następujący problem: dana jest funkcja holomorficzna  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  właściwa i taka, że  $f^{-1}(0) = \{0\}$ , oraz osobliwy kiełek analityczny  $(W, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ . Niech  $V := f^{-1}(W)$  będzie pełnym przeciwobrazem (pullbackiem) reprezentanta  $W$ . Chcemy wykazać, że wtedy kiełek  $(V, 0)$  również jest osobliwy.

Powyższy problem dotyczący cofania osobliwości kielka analitycznego został postawiony w 2007 r. przez P. Ebenfelta i L. Rothschild, którzy w artykule [2] wykazali prawdziwość hipotezy przy założeniu, że  $V \not\subseteq \{\text{Jac } f = 0\}$ . W przypadku ogólnym hipoteza po dziś dzień nie doczekała się rozstrzygnięcia.

Rozpoczniemy od krótkiego omówienia opublikowanych dotychczas wyników częściowych, opisanych kolejno w pracach [1], [3] i [4]. Następnie przedstawimy dwa nowe rezultaty, prowadzące do rozwiązania hipotezy w przypadku globalnym dla zbioru algebraicznego i funkcji wielomianowej właściwej, jak również przy założeniu, że  $\text{codim}_W \text{Sng } W = 1$ . W obydwu przypadkach odpowiedź na postawione pytanie jest pozytywna (praca wspólna z M. P. Denkowskim).

[1] M. P. Denkowski, Multiplicity and the pull-back problem, *Manuscripta Math.*, 2016, 149(1-2), 83–91

[2] P. Ebenfelt, L. Rothschild, Images of real submanifolds under finite holomorphic mappings, *Comm. Anal. Geom.*, 2007, 15(3), 491–507

[3] L. Giraldo, R. Roeder, Pulling back singularities, *Proc. A. M. S.*, 2020, 148(3), 1207–1217

[4] J. Lebl, Pullback of varieties by finite maps, *preprint*, ArXiv:0812:2498



# Teoria liczb

ORGANIZATORZY:

ŁUKASZ PAŃKOWSKI (UAM), MACIEJ ULAS (UJ)

ROZMAITOŚCI SEMIABELOWE I PROBLEM BADANIA LINIOWEJ  
ZALEŻNOŚCI PUNKTÓW

**Dorota Blinkiewicz**

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu  
e-mail: dorota.blinkiewicz@amu.edu.pl

W czasie wykładu omówię problem badania liniowej zależności dla rozmaitości semiabelowych. Przedstawię przykłady, dla których lokalno-globalny problem logarytmu dyskretnego o bazie wieloelementowej (ang. the local to global multiple base discrete logarithm problem) nie zachodzi, a które to przykłady prowadzą do konstrukcji dzikich 1-motywów. W szczególności omówię lokalno-globalny problem logarytmu dyskretnego o bazie wieloelementowej dla  $\mathbb{Z}$  oparty na trzech liczbach pierwszych oraz dla  $E_d(\mathbb{Q}(i))$  oparty na trzech punktach, gdzie  $E_d : y^2 = x^3 - d^2x$  jest krzywą eliptyczną z mnożeniem zespolonym (patrz [3]). Wynik ten rozszerza wyniki z [1] oraz [2].

[1] G. Banaszak, D. Blinkiewicz, Families of wild 1-motives, *preprint*, 2023

[2] D. Blinkiewicz, On multiple base discrete logarithm problem in  $\mathbb{G}_m^n$  and  $E_d^n$ , *Banach Center Publications*, 2021, 124, 27–33

[3] D. Blinkiewicz, Multiple base discrete logarithm problem based on three primes in  $\mathbb{Z}$  and three points in  $E_d(\mathbb{Q}(i))$ , *przyjęte do publikacji*, 2024

## TWIERDZENIE HADAMARDA O ILORAZIE DLA WIELOMIANÓW UOGÓLNIONYCH

**Jakub Byszewski**

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: [jakub.byszewski@uj.edu.pl](mailto:jakub.byszewski@uj.edu.pl)

Suma i iloczyn dwóch ciągów liniowo rekurencyjnych jest również ciągiem liniowo rekurencyjnym; zazwyczaj nie jest tak jednak w przypadku ich ilorazu. Jest tak dlatego, że wartości ciągu liniowo rekurencyjnego leżą z konieczności w pewnym skończone generowanym pierścieniu i własność ta nie jest zachowywana przy braniu ilorazu. Klasyczne twierdzenie Hadamarda o ilorazie głosi, że powyższy „warunek skończoności” jest jedyną przyczyną, dla której iloraz dwóch ciągów liniowo rekurencyjnych może przestać być ciągiem liniowo rekurencyjnym.

W referacie sformułuję wersję twierdzenia Hadamarda o ilorazie dla ciągów zadanych przez wielomiany uogólnione, czyli funkcje, które można wyrazić przy pomocy zwykłych operacji algebraicznych (dodawanie, mnożenie) oraz operacji brania części całkowitej. Wielomiany uogólnione były intensywnie badane (zarówno *explicite* jak i *implicite*) w teorii liczb oraz teorii ergodycznej i są ściśle związane z dynamiką na nilrozmaitościach. Pokażemy, w jaki sposób można użyć metod pochodzących z dynamiki i teorii ergodycznej, by otrzymać wnioski dotyczące arytmetycznego zachowania ilorazów dwóch wielomianów uogólnionych. Sformułujemy również kilka problemów otwartych.

Referat będzie oparty na wspólnej pracy z Jakubem Koniecznym (Oxford).

O NIERÓWNOŚCI TYPU BESSENRODT-ONO DLA FUNKCJI  $A$ -PARTYCJI

Krystian Gajdzica

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: krystian.gajdzica@doctoral.uj.edu.pl

W roku 2016 Christina Bessenrodt i Ken Ono udowodnili, że klasyczna funkcja partycji  $p(n)$  spełnia nierówność postaci

$$p(a)p(b) > p(a + b)$$

dla wszystkich liczb naturalnych  $a, b > 1$  takich, że  $a + b > 9$ . Powyższe twierdzenie zapoczątkowało szereg badań związanych z poszukiwaniem podobnych rezultatów dla innych wariantów funkcji partycji.

Podczas referatu omówimy analogon powyższej nierówności w kontekście tak zwanej funkcji  $A$ -partycji  $p_A(n)$ , czyli funkcji zliczającej wyłącznie te partycje liczby  $n$ , których składowe należą do ustalonego multizbioru  $A$  liczb całkowitych dodatnich. Ponadto problem ten rozpatrzymy również dla pewnej rodziny wielomianów ściśle związanej z funkcją  $p_A(n)$ . Referat będzie oparty na pracach [1,2,3,4].

[1] K. Gajdzica, Log-concavity of the restricted partition function  $p_A(n, k)$  and the new Bessenrodt-Ono type inequality, *J. Number Theory*, 2023, 251, 31–65

[2] K. Gajdzica, B. Heim, M. Neuhauser, Polynomization of the Bessenrodt-Ono Type Inequalities for  $A$ -Partition Functions, *Annals of Combinatorics*, 2024

[3] K. Gajdzica, P. Miska, M. Ulas, On a general approach to Bessenrodt-Ono type inequalities and log-concavity properties, *Annals of Combinatorics*, 2024

[4] K. Gajdzica, On the Bessenrodt-Ono type inequality for a wide class of  $A$ -partition functions, *preprint*, ArXiv:2401.16267

„WYKŁADNICZA” TORSJA SUPERELIPTYCZNYCH JAKOBIANÓW

Jędrzej Garnek

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu/Instytut Matematyczny PAN  
e-mail: jgarnek@amu.edu.pl

Referat dotyczyć będzie reprezentacji Galois rozmaitości abelowych i Jakobianów krzywych. Rozmaitości abelowe to zbiory zadane przez równania wielomianowe, których punkty można dodawać. Każda krzywa zanurza się w rozmaitość abelową zwaną Jakobianem. Niewymierność współrzędnych punktów skończonego rzędu Jakobianu można wyrazić za pomocą reprezentacji grupy Galois ciała liczb wymiernych (jednej z najważniejszych grup w matematyce). Reprezentacje te odgrywają centralną rolę np. w dowodzie Wielkiego Twierdzenia Fermata oraz w programie Langlandsa. Hipoteza Mumforda-Tate’a opisuje obraz reprezentacji Galois związanej z rozmaitością w terminach grupy algebraicznej pochodzącej od topologii rozmaitości (a dokładniej jej struktury Hodge’a). Hipoteza ta stanowi również pomost między hipotezą Tate’a a hipotezą Hodge’a, jednym z siedmiu problemów milenijnych.

W swoim referacie skupię się na „wykładowej” torsji Jakobianów krzywych postaci  $y^l = f(x)$ , tzn. torsji rzędu  $l^n$  dla  $n \geq 1$ . W szczególności, przy pewnych drobnych założeniach, wyznaczę obraz  $l$ -adycznej reprezentacji Galois. Zastosowaniem uzyskanych wyników jest dowód hipotezy Hodge’a, hipotezy Tate’a oraz hipotezy Mumforda-Tate’a dla badanych rozmaitości.

## ROZWINIĘCIA TYPU DWUMIANOWEGO

Karol Gryksza

Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

e-mail: karol.gryksza@uken.krakow.pl

Klasyczne rozwinięcie dwumianowe swoją historię rozpoczyna najprawdopodobniej już od czasów Euklidesa. W kolejnym wieku hinduski matematyk Pingala prezentuje to, co ówczesnie nazywamy trójkątem Pascala. Współcześnie wiemy, że wszystkie wielomiany  $p_n$  naśladujące rozwinięcie dwumianowe, a więc będące rozwiązaniem równania

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y),$$

są charakteryzowane przez tak zwany operator Delta [1]. W związku z tym nasuwa się naturalne pytanie: co dalej?

Rozważmy klasyczne rozwinięcie dwumianowe, zapisane w następującej postaci:

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^j b^{k-j}.$$

Jeśli teraz dobierzemy liczbę bezkwadratową  $n$  i taką, że  $\omega(n) = k$ , to powyższe rozwinięcie daje się zapisać w równoważnej postaci

$$(a+b)^{\omega(n)} = \sum_{d|n} a^{\omega(d)} b^{\omega(n)-\omega(d)}. \quad (1)$$

Powyższy wzór wygląda w swojej postaci podobnie do klasycznego, co prowadzi do szeregu naturalnych pytań. Celem tych pytań jest otrzymanie tożsamości podobnych do (1), w których prawa strona podlega pewnym uogólnieniom, gdy lewa strona jest tą, która może ulegać istotnym zmianom.

W trakcie referatu opowiem o możliwych uogólnieniach tożsamości (1) w wielu kierunkach: większa liczba zmiennych, osłabienie założeń na liczbę  $n$  czy zastąpienie funkcji  $\omega$  inną (być może dowolną) funkcją arytmetyczną o rozsądnych własnościach.

Referat na podstawie pracy [2] oraz niepublikowanych badań autora.

[1] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Springer, 1997

[2] K. Gryksza, Binomial formulas via divisors of numbers, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 2021, 27(4), 122–128

## O ŁAŃCUCHACH I CYKLACH KRZYWYCH ELIPTYCZNYCH

Maciej Grześkowiak

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

e-mail: maciejg@amu.edu.pl

Niech  $E/\mathbb{F}_p$  będzie krzywą eliptyczną zdefiniowaną na ciałem skończonym  $\mathbb{F}_p$ , gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą. Oznaczmy przez  $E(\mathbb{F}_p)$  grupę  $\mathbb{F}_p$ -wymiernych punktów na  $E$  oraz przez  $\#E(\mathbb{F}_p)$  liczbę elementów  $E(\mathbb{F}_p)$ . Dla ustalonej liczby naturalnej  $s$  definiujemy,  $s$ -łańcuch krzywych eliptycznych jako ciąg różnych krzywych  $E_1/\mathbb{F}_{p_1}, \dots, E_s/\mathbb{F}_{p_s}$  spełniający

$$q \mid \#E_1(\mathbb{F}_{p_1}), \quad p_1 \mid \#E_2(\mathbb{F}_{p_2}), \quad \dots, \quad p_{s-1} \mid \#E_s(\mathbb{F}_{p_s}),$$

gdzie  $q, p_1, \dots, p_s$  są liczbami pierwszymi. Jeśli  $p_s = q$ , to  $s$ -łańcuch nazywamy  $s$ -cyklem krzywych eliptycznych. Silverman oraz Stange pokazali, że dla dowolnego  $s$  istnieje  $s$ -cykl krzywych eliptycznych [4]. Niech  $q, (q, p) = 1$  będzie dzielnikiem pierwszym  $\#E(\mathbb{F}_p)$ . Stopniem zanurzenia krzywej  $E$  względem  $q$  nazywamy najmniejszą liczbą naturalną  $k$  taką, że  $E[q] \subseteq E(\mathbb{F}_{p^k})$ . Krzywe eliptyczne zdefiniowane nad ciałem  $\mathbb{F}_p$ , które mają podgrupę dużego rzędu  $q$  oraz mały stopień zanurzenia  $k$  względem  $q$  są nazywane *pairing-friendly*.

W ostatnich latach zaproponowano się wiele protokołów kryptograficznych opartych na tzw. nieinteraktywnych dowodach z wiedzą zerową [2],[3]. Aby zaimplementować takie schematy kryptograficzne wymaga się konstrukcji ciągu specjalnych krzywych eliptycznych zdefiniowanych nad ciałem skończonym, które tworzą łańcuch lub cykl. Każda krzywa w tej strukturze powinna posiadać odpowiednio duży dzielnik pierwszy oraz jednocześnie być *pairing-friendly* względem tego dzielnika. Podczas mojego referatu przedstawię idee konstruowania takich krzywych, omówię problemy otwarte związane z tym zagadnieniem [1] oraz zaprezentuję algorytm znajdujący łańcuch krzywych, który działa w czasie wielomianowym.

[1] M. Bellés-Muñoz, J. Urroz, J. Silva, Revisiting Cycles of Pairing-Friendly Elliptic Curves, *CRYPTO 2023, LNCS 14082*, 2023, 3-37

[2] C. Costello et al., Geppetto: Versatile Verifiable Computation, *2015 IEEE Symposium on Security and Privacy, San Jose, CA, USA*, 2015, 253-270

[3] J. Groth, On the Size of Pairing-Based Non-interactive Arguments, *EUROCRYPT 2016, LNCS 9666*, 2016, 305-326

[4] J. Silverman, K. Stange, Amicable Pairs and Aliquot Cycles for Elliptic Curves, *Experiment. Math.*, 2011, 20(3) 329-357

SZEŚCIENNE RÓWNANIA PELLA NAD PIERŚCIENIAMI WIELOMIANÓW I  
ARYTMETYKA KRZYWYCH SUPERELIPTYCZNYCH

Tomasz Jędrzejak

Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki

e-mail: tjedrzejak@gmail.com

Klasyczne równanie Pella to kwadratowe równanie diofantyczne postaci  $x^2 - dy^2 = 1$ , gdzie  $d \in \mathbb{N}$  nie jest kwadratem. Wiadomo, że ma ono nieskończenie wiele rozwiązań i jest związane z jednościami w pierścieniach liczb algebraicznych ciał kwadratowych. Jeśli zamiast rozszerzeń kwadratowych weźmiemy rozszerzenia sześciennie postaci  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})$  (teraz  $d \in \mathbb{N}$  nie jest sześcianiem), dostaniemy tzw. sześciennie równania Pella, czyli  $x^3 + dy^3 + d^2z^3 - 3dxyz = 1$  (zauważmy, że lewa strona jest normą elementu  $x + y\sqrt[3]{d} + z\sqrt[3]{d^2} \in \mathbb{Z}[\sqrt[3]{d}]$ ). Również ono ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Istnieje analogia między arytmetyką ciał liczbowych a ciał funkcyjnych jednej zmiennej. Problem znajdowania niestałych jedności w tych ostatnich ciałach prowadzi do odpowiedników równań Pella nad pierścieniami wielomianów. Dokładniej, tytułowe równanie ma postać

$$P(x)^3 + D(x)Q(x)^3 + D(x)^2R(x)^3 - 3D(x)P(x)Q(x)R(x) = 1, \quad (1)$$

gdzie  $K$  jest ciałem (lub tylko pierścieniem) i  $D(x) \in K[x]$  ma dodatni stopień (w tym referacie rozważamy  $K = \mathbb{Q}$  i  $D(x) = x^{3n} + ax + b$ ). Rozwiązanie  $(P, Q, R)$  równania (1) nazywamy trywialnym, gdy  $Q = R = 0$ . W odróżnieniu od diofantycznych sześciennych równań Pella wielomianowe sześciennie równanie Pella (1) może nie posiadać nietrywialnych rozwiązań. W istocie główna trudność tkwi w rozstrzygnięciu czy takie ma (wiadomo, że jeśli tak, to jest ich nieskończenie wiele). Kryterium na istnienie nietrywialnego rozwiązania (1) związane jest z arytmetyką rozmaitości Jacobiego krzywych supereliptycznych  $y^3 = D(x)$ .

W referacie przedstawię znane rezultaty dotyczące tytułowych równań i opowiem o moich ostatnio uzyskanych wynikach. W szczególności, jeśli  $ab = 0$ , to (1) ma nietrywialne rozwiązania (dane jawnymi wzorami). Z drugiej strony, dla dowolnego  $n > 1$  istnieje nieskończenie wiele par  $(a, b)$  takich, że tytułowe równania nie mają nietrywialnych rozwiązań (można też podać jawne przykłady).

Referat będzie oparty na pracy [1].

[1] T. Jędrzejak, Cubic Pell equations over polynomial rings and superelliptic curves  $y^3 = x^{3n} + ax + b$ , *preprint*, submitted 2024



O RÓWNANIU DIOFANTYCZNYM  $\sigma_2(\bar{X}_n) = \sigma_n(\bar{X}_n)$ **Piotr Miska**

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

e-mail: piotr.miska@uj.edu.pl

Niech  $n \geq 3$  oraz  $\bar{X}_n = (x_1, \dots, x_n)$ . Oznaczmy przez  $\sigma_k(\bar{X}_n)$   $k$ -ty standardowy wielomian symetryczny  $n$  zmiennych, tj.

$$\sigma_k(\bar{X}_n) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#I=k}} \prod_{i \in I} x_i.$$

Przedmiotem referatu są zbiory  $S(n)$  rozwiązań równania  $\sigma_2(\bar{X}_n) = \sigma_n(\bar{X}_n)$  w dodatnich liczbach całkowitych  $x_1 \leq \dots \leq x_n$ . Pokażemy, że dla każdego  $n \geq 3$  zbiór  $S(n)$  jest skończony i podamy wzór na największą wspólną wartość wyrażeń  $\sigma_2(\bar{X}_n)$  i  $\sigma_n(\bar{X}_n)$  oraz na największą wartość  $x_n$  występującą w pewnym rozwiązaniu tytułowego równania. Omówimy również zbiór ilorazów  $x_n/x_{n-1}$  spośród wszystkich elementów zbioru  $\bigcup_{n \geq 3} S(n)$ .

Wyniki pochodzą ze wspólnej pracy z Maciejem Ulasem [1].

[1] P. Miska, M. Ulas, On the Diophantine equation  $\sigma_2(\bar{X}_n) = \sigma_n(\bar{X}_n)$ , *Int. Journal Number Theory*, 2024, to appear, DOI: 10.1142/S1793042124500635

## WSPÓLNE WALUACJE WIELOMIANÓW PODZIAŁU

**Bartosz Naskręcki**

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu/ Instytut Matematyczny PAN  
e-mail: bartosz.naskrecki@amu.edu.pl

W tej prezentacji omówimy wyniki wspólnej pracy z Matteo Verzobio [1] dotyczącej wspólnych waluacji wielomianów podziału punktów na krzywych eliptycznych. Dowodzimy formuły dla wykładnika skracania między wielomianami podziałowymi  $\psi$  i  $\phi$  związanych z sekwencją punktów na krzywej eliptycznej zdefiniowanej nad ciałem o waluacji dyskretnej. Formuła jest identyczna z wynikiem Yabuty-Voutiera [2] dla przypadku skończonego rozszerzenia ciała p-adycznego  $\mathbb{Q}_p$  i uogólnia się na przypadek niestandardowych typów Kodairy dla niedoskonałych ciał rezydualnych. Nasz dowód zastosowany do przypadku  $\mathbb{Q}_p$  jest znacznie krótszy i opiera się wyłącznie na elementarnych właściwościach lokalnych wysokości Nérona. Badanie ciągu skrótów ma kilka interesujących zastosowań. Na przykład, znajomość jego zachowania była niezbędna do wykazania, że każdy dzielnik ciągu eliptyczny spełnia relację rekurencyjną pierwotnie zdefiniowaną przez Warda.

[1] B. Naskręcki, M. Verzobio, Common valuations of division polynomials, *Proc. A. R. Soc. Edinb.*, 2024, DOI:10.1017/prm.2024.7, 1–15

[2] P. Voutier and M. Yabuta, The greatest common valuation of  $\phi_n$  and  $\psi_n$  at points on elliptic curves, *J. Number Theory*, 229 (2021), 16–38.

## UNIWERSALNOŚĆ W KRÓTKICH PRZEDZIAŁACH

**Łukasz Pańkowski**

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

e-mail: lpan@amu.edu.pl

Podczas odczytu omówione zostaną ostatnie wyniki dotyczące uniwersalności funkcji dze-ta Riemanna w krótkich przedziałach. Zagadnienie to dotyczy znajdowania oszacowań wielkości  $H := H(T)$ , dla której każdy przedział postaci  $[T, T + H]$  zawiera, dla dostatecznie dużego  $T$ , liczbę rzeczywistą  $\tau$  taką, że dowolnie zadaną funkcję analityczną  $f(s)$  można przybliżyć przez przesunięcia  $\zeta(s + i\tau)$  (jednostajnie na zbiorze zwartym leżącym w prawej połowie pasa krytycznego). Referat będzie oparty na pracy [1].

[1] J. Andersson, R. Garunkštis, R. Kačinskaitė, K. Nakai, Ł. Pańkowski, A. Sourmelidis, R. Steuding, J. Steuding, S. Wani-yakul, Notes on universality in short intervals and exponential shifts, *Lithuanian Mathematical Journal*, 2024, 64, 125–137

WYSTĄPIENIA BLOKÓW W ROZWINIĘCIU BINARNYM  $n$  I  $n + t$ **Bartosz Sobolewski**

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: bartosz.sobolewski@uj.edu.pl

Niech  $s(n)$  oznacza sumę cyfr binarnych liczby naturalnej  $n$ . W ostatnich latach uzyskane zostały znaczące rezultaty dotyczące zachowania różnic postaci  $s(n+t) - s(n)$ , gdzie  $t$  jest ustaloną liczbą naturalną. Między innymi, Spiegelhofer i Wallner [1] udowodnili, że gdy rozwinięcie binarne  $t$  zawiera  $N(t) \geq N_0$  bloków 01, to gęstość asymptotyczna

$$c_t = \text{dens}\{n : s(n+t) \geq s(n)\}$$

spełnia nierówność  $c_t > 1/2$ . Wynik ten częściowo potwierdza hipotezę sformułowaną w 2011 roku przez Cusicka. Co więcej, wykazali oni, że gdy  $N(t) \rightarrow \infty$ , to rozkład  $s(n+t) - s(n)$  zbiega jednostajnie do rozkładu normalnego (po przeskalowaniu).

Wyniki te opierają się na asymptotycznych oszacowaniach, które nie są wystarczająco precyzyjne, gdy  $N(t)$  jest małe. W trakcie referatu przedstawię dotychczasowe postępy dotyczące tych „trudnych przypadków” w kontekście hipotezy Cusicka. Wykażę, że zachodzi ona dla  $N(t) = 1, 2$  i podam wzór ogólny na  $c_t$ , który może służyć jako punkt wyjścia do dalszej analizy. Podam także silniejszą hipotezę dotyczącą optymalnego ograniczenia dolnego dla  $c_t$  w zależności od  $N(t)$ , popartą wynikami numerycznymi.

Na koniec omówię uogólnienie rozważań na funkcje  $|n|_w$ , zliczające wystąpienia dowolnego zadanego bloku cyfr  $w$  w zapisie binarnym  $n$ . W szczególności, sformułuję rezultat mówiący, że rozkład różnicy  $|n+t|_w - |n|_2$  również jest zbliżony do normalnego [2].

Referat na podstawie wspólnej pracy z Lukaszem Spiegelhoferem (Uniwersytet w Leoben).

[1] L. Spiegelhofer, M. Wallner, The binary digits of  $n+t$ , *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 2023, 24(5), 1–31

[2] B. Sobolewski, L. Spiegelhofer, Block occurrences in the binary expansion, *preprint*, ArXiv:2309.00142

O RÓWNANIU  $x^3 + y^3 = a^k + b^k$ 

Maciej Ulas

Instytut Matematyki, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński  
e-mail: maciej.ulas@uj.edu.plDla  $k \in \{4, 5, 6, 7\}$  rozważamy równanie diofantyczne

$$x^3 \pm y^3 = a^k \pm b^k, \quad (1)$$

gdzie znaki wybierane są niezależnie i pytamy o istnienie dodatnich i względnie pierwszych rozwiązań w liczbach całkowitych. Łatwo wykazać, że równanie  $x^3 + y^3 = a^k + b^k$  ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych. Jest to szczególny przypadek twierdzenia udowodnionego przez Landera, który można łatwo uogólnić na przypadek równań o różnych znakach. Jeśli  $k > 3$ , to rozwiązania skonstruowane metodą Landera nie są względnie pierwsze.

Równanie (1) z obydwoma znakami “+” było obiektem badań Wagstaffa. W szczególności wyznaczył on wszystkie dodatnie rozwiązania względnie pierwsze w przedziale  $a \leq b \leq M$ , gdzie  $M = 10000, 5000, 1400, 700$  dla  $k = 4, 5, 6, 7$  odpowiednio. Ponadto przedstawił on dwa rozumowania heurystyczne, które sugerują, że jeśli  $k = 4, 5, 6$ , to równanie  $x^3 + y^3 = a^k + b^k$  ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych, które są względnie pierwsze, a w przypadku  $k \geq 7$  jest takich rozwiązań tylko skończenie wiele. Wyniki Wagstaffa były punktem wyjścia do badań, w których rozważam bardziej ogólne równanie (1) zarówno z obliczeniowego, jak i teoretycznego punktu widzenia. Dokładniej, udowodnimy, że dla  $k = 4, 6$  i każdego wyboru znaków rozważane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych, które są względnie pierwsze. Dla  $k = 5, 7$  przedstawione zostaną wyniki obszernych poszukiwań komputerowych rozwiązań spełniających warunek  $0 < b < a \leq 50000$ .

## EQUAL SUM PRODUCT PROBLEM

Maciej Zakarczemny

Politechnika Krakowska

e-mail: mzakarczemny@pk.edu.pl

Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą,  $n \geq 2$ . Oznaczmy przez  $N(n)$  liczbę całkowitych rozwiązań  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n \quad (1)$$

takich, że  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 1$ . Podobnie dla ustalonego całkowitego dodatniego  $a$  niech  $N_a(n)$  to odpowiednia liczba rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$

Niech  $f(n)$  oznacza multiplikatywną funkcję partycji, tzn. liczbę różnych rozkładów liczby naturalnej  $n$  na czynniki całkowite większe od 1, gdzie kolejność czynników nie ma znaczenia. W referacie opowiemy o silnym związku między ciągami  $(N(n))_{n \geq 2}$  oraz  $(f(n))_{n \geq 2}$ . W szczególności  $N, f$  mają średnie tego samego rzędu, dokładniej  $\sum_{2 \leq n \leq x} a(n) \sim \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{2\sqrt{\pi}(\log x)^{3/4}}$  zarówno dla  $a(n) = N(n)$ , jak i dla  $a(n) = f(n)$ . Ponadto dla obu  $N, f$  istnieje nieskończenie wiele  $n$ , dla których wartości wyrazów znacząco przekraczają odpowiednie średnie. Podamy też różne oszacowania i aproksymacje na  $N(n), N_a(n)$  oraz ich sumy. Wyniki, o których będę mówił, zostały otrzymane wspólnie z C. Sándorem. Referat będzie oparty na pracach [1,2,3,4,5].

[1] A. Oppenheim, On an arithmetic function II, *J. London Math. Soc.*, 1927, 2, 123–130

[2] C. Sándor, M. Zakarczemny, Equal Sum and Product Problem III, *preprint*, arXiv:2405.11600v1 2024, 1–7

[3] A. Weingartner, On the Diophantine equation  $\prod x_i = \sum x_i$ , *Integers*, 2012, 12, Paper No. A57, 1–8

[4] M. Zakarczemny, On the Equal Sum and Product Problem, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 2021, 90, 4, 387–402

[5] M. Zakarczemny, Equal-Sum-Product Problem II, *Canadian Mathematical Bulletin*, 2023, 1–11

## UNIWERSALNE FORMY KWADRATOWE NAD CIAŁAMI LICZBOWYMI

Błażej Żmija

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: bzmija@impan.pl

Niech  $K$  będzie ciałem całkowicie rzeczywistym a  $\mathcal{O}_K$  będzie jego pierścieniem elementów całkowitych. Mówimy, że forma kwadratowa o współczynnikach w  $\mathcal{O}_K$  jest uniwersalna, jeśli jest całkowicie dodatnio określona oraz reprezentuje wszystkie całkowicie dodatnie elementy  $\mathcal{O}_K$ .

W czasie referatu postaram się przedstawić aktualny stan wiedzy na temat uniwersalnych form kwadratowych. Najwięcej uwagi poświęcę przypadkowi ciał kwadratowych  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$  dla bezkwadratowego  $D > 0$ . Moim celem będzie zaprezentowanie rezultatów dotyczących minimalnej liczby zmiennych uniwersalnych form kwadratowych nad  $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ .

Referat na podstawie wspólnej pracy z Vítězslavem Kalą i Pavlem Yatsyną [2].

[1] V. Kala, Universal quadratic forms and indecomposables in number fields: A survey, *Commun. Math.*, 31 (2023), Special issue: Euclidean lattices: theory and applications, 81–114

[2] V. Kala, P. Yatsyna, B. Żmija, Real quadratic fields with a universal form of given rank have density zero, *preprint*, ArXiv:2302.12080





# Teoria osobliwości - sesja specjalna seminarium GKŁW

ORGANIZATORZY:

CHRISTOPHE EYRAL (IM PAN), TADEUSZ KRASIŃSKI (UŁ), ALEKSANDRA NOWEL (UG),  
ANNA VALETTE (UJ)

## GERMS OF REAL SURFACES

**Lev Birbrair**

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

e-mail: lev.birbrair@gmail.com

I am going to describe old and new results related to Inner, Outer and Ambient Lipschitz geometry of germs of Real semi-algebraic and definable surfaces. The subject is closely related to non-archimedean geometry and Knot Theory.

## LIPSCHITZOWSKIE TWIERDZENIE O RZĘDZIE

Maciej Denkowski

Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki, Instytut Matematyki,  
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków  
e-mail: maciej.denkowski@uj.edu.pl

Na początku roku 2024 ogłosiłem w nowej wersji preprintu [4] dowód ogólnego twierdzenia o lipschitzowskiej funkcji uwikłanej w wersji Yomdina z jego pracy [5], gdzie twierdzenie to – kluczowe narzędzie do dowodu głównego rezultatu – zacytowano bez dowodu i w błędnym przekonaniu, że łatwo i natychmiastowo wynika z twierdzenia Clarke’a o lipschitzowskiej funkcji odwrotnej. W istocie to ostatnie pozwala na udowodnienie lipschitzowskiej wersji twierdzenia o funkcji uwikłanej przy znacznie bardziej restrykcyjnym założeniu (\*) dotyczącym subróżniczki Clarke’a niż przyjmował w swojej pracy Yomdin. Z biegiem lat zaczęto uważać wersję Yomdina za fałszywą, błędnie interpretując pewien przykład z pracy Birbraira i Siersmy [2]. Dowód z [4] polegał na pokazaniu, że w istocie warunek Yomdina ( $Y$ ) pociąga wspomniane wyżej założenie (\*) na subróżniczkę Clarke’a.

Krótko po wydaniu nowej wersji preprintu, dowiedziałem się, że wersja Yomdina twierdzenia o lipschitzowskiej funkcji uwikłanej wynika wprost z lipschitzowskiego twierdzenia o rzędzie Butlera, Timouriana i Vigera z [3], dowodzonego bardzo podobnym do mojego rozumowaniem. Praca ta jednak zawiera nieusuwalną lukę w dowodzie, co pokazano niedawno w artykule [1] (Proposition 3.1) Bartla i Fabiana przykładem przeczącym Stwierdzeniu 2.1 z [3], na którym oparte było twierdzenie o rzędzie. Co ciekawe, autorzy [3] i ja popełniliśmy w gruncie rzeczy ten sam, skądinąd bardzo elementarny, błąd. Przykład z [1] pokazuje, że warunek Yomdina ( $Y$ ) na ogół nie implikuje warunku (\*).

Ostatecznie więc problem prawdziwości wersji Yomdina lipschitzowskiego twierdzenia o funkcji uwikłanej jest nadal otwarty, a co za tym idzie jego główne twierdzenie dotyczące struktury tzw. zbioru centralnego (szkieletu) pozostaje do udowodnienia.

Niniejszy referat będzie poświęcony naprawie lipschitzowskiej wersji twierdzenia o rzędzie Butlera, Timouriana i Vigera, którego dowód przeprowadzimy przy wzmocnionych założeniach. Prowadzone rozważania zostaną uzupełnione o propozycję nowego sposobu zaatakowania lipschitzowskiego twierdzenia o funkcji uwikłanej w wersji Yomdina.

[1] D. Bartl, M. Fabian, Can Pourciau’s open mapping theorem be derived from Clarke’s inverse mapping theorem easily, *J. Math. Anal. Appl.*, 2021, 497(2), 124858

[2] L. Birbrair, D. Siersma, Metric properties of conflict sets, *Houston Journ. Math.*, 2009, 35(1), 73–80

[3] G.J. Butler, J.G. Timourian, C. Vigeo, The rank theorem for locally Lipschitz continuous functions, *Can. Math. Bull.*, 1988, 31, 217–226

[4] M. Denkowski, On Yomdin’s version of a Lipschitz Implicit Function Theoreme, *preprint*, ArXiv:1610.07905

[5] Y. Yomdin, On the local structure of a generic central set, *Comp. Math.*, 1981, 43(2), 225–238

METODY ALGEBRY RÓŻNICZKOWEJ W TEORII SYSTEMÓW  
DYNAMICZNYCH

**Zbigniew Hajto**

Wydział Matematyki i Informatyki UJ

e-mail: Zbigniew.Hajto@uj.edu.pl

W referacie przedstawię teorię Galois dla systemów liniowych równań różniczkowych wraz z zastosowaniami w zagadnieniach rzeczywistej geometrii analitycznej oraz problemach związanych z całkowalnością systemów dynamicznych [1]. W szczególności objaśnię własności topologiczne rozwiązań układów dynamicznych niecałkowalnych w sensie Liouville'a - Arnolda, których trajektorie są definiowalne w strukturach  $o$ -minimalnych [2]. Na zakończenie omówię klasę rzeczywistych funkcji Liouville'a w powiązaniu z ideą "théorie modérée" pochodzącą od A. Grothendiecka [3].

[1] T. Crespo, Z. Hajto and R. Mohseni, Real Liouvillian extensions of partial differential fields, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl*, 2021,17, Paper No. 095, 16 pp.

[2] Z. Hajto and R. Mohseni, Tame topology and non-integrability of dynamical systems, *GKLW-workshop in Singularity Theory in memory of Stanisław Łojasiewicz*, Banach Center Publications, to appear.

[3] A. Grothendieck, Esquisse d'un programme, *Geometric Galois Actions I*, Cambridge University Press, 1997, 5–48.

$\Lambda_p$ -REGULARNY ROZKŁAD JEDNOŚCI, SEMIALGEBRAICZNA WERSJA  
TWIERDZENIA CALDERÓNA-ZYGMUNDA

**Beata Kocel-Cynk**

Politechnika Krakowska

e-mail: beata.kocel-cynk@pk.edu.pl

Współautorzy:

**Wiesław Pawłucki**

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: wieslaw.pawlucki@uj.edu.pl

**Anna Valette**

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: anna.valette@uj.edu.pl

Twierdzenie Calderóna-Zygmunda o regularyzacji mówi, że funkcja odległości od zbioru domkniętego  $W \subset \mathbb{R}^n$  jest równoważna pewnej funkcji  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus W)$ . Ponadto pochodne cząstkowe funkcji  $f$  do ustalonego rzędu są ograniczone przez odpowiednie potęgi funkcji odległości od zbioru  $W$ .

Celem referatu jest przedstawienie następującej semialgebraicznej wersji twierdzenia Calderóna-Zygmunda

**Twierdzenie.**

Niech  $W$  będzie domkniętym zbiorem semialgebraicznym,  $W \subset \mathbb{R}^n$  oraz niech  $p \in \mathbb{N}$ .

Wtedy istnieją funkcja Nasha  $f : \mathbb{R}^n \setminus W \rightarrow (0, +\infty)$  i stałe dodatnie  $A, B_\alpha$ , dla  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  i  $|\alpha| \leq p$  takie, że dla każdego  $x \in \mathbb{R}^n \setminus W$  zachodzą nierówności

$$A^{-1}d(x, W) \leq f(x) \leq Ad(x, W)$$

oraz

$$|D^\alpha f(x)| \leq B_\alpha(d(x, W))^{1-|\alpha|}.$$

Powyższe twierdzenie zostanie przedstawione jako przykład zastosowania twierdzenia o rozkładzie jedności dla funkcji  $\Lambda_p$ -regularnych. Przedstawię również podstawowe definicje i własności funkcji  $\Lambda_p$ -regularnych.

[1] A.-P. Calderón, A. Zygmund, Local properties of solutions of elliptic partial differential equations, *Studia Math.*, 20 (1961), 171–225

[2] B. Kocel-Cynk, W. Pawłucki, A. Valette, A. Semialgebraic Calderón-Zygmund theorem on regularization of the distance function, *Math. Ann.*, (2024)

[3] M. Shiota, Approximation theorems for Nash mappings and Nash manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 293 (1986), no. 1, 319–337

$\delta$ -STAŁE DEFORMACJE LINIOWE OSOBLIWOŚCI KRZYWYCH

**Tadeusz Krasieński**

Uniwersytet Łódzki, Wydział Matematyki i Informatyki

e-mail: tadeusz.krasinski@wmii.uni.lodz.pl

**Aleksandra Zakrzewska**

Uniwersytet Łódzki, Wydział Matematyki i Informatyki

e-mail: aleksandra.zakrzewska@wmii.uni.lodz.pl

Niech  $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  będzie osobliwością krzywej płaskiej, tzn.  $f_0 \neq 0$  i  $(0, 0)$  jest izolowanym punktem krytycznym  $f_0$ . Przez  $\mu(f_0)$  oznaczamy liczbę Milnora  $f_0$  w  $0$  (= stopień topologiczny odwzorowania gradientowego  $\nabla f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ ) i  $\delta(f_0)$   $\delta$ -niezmiennik  $f_0$  w  $0$  (= liczba podwójnych punktów osobliwych w generycznej deformacji zbioru zer  $V(f_0)$ ). Niech  $(f_s)_{s \in S}$ ,  $S$  - otoczenie zera w  $\mathbb{C}$ , będzie holomorficzną deformacją  $f_0$ . Jeśli liczba Milnora  $\mu(f_s)$  jest stała w tej deformacji, to typ topologiczny kielków zbiorów  $V(f_s)$  jest również stały. W przypadku  $\delta$ -niezmiennika  $\delta(f_s)$  typ topologiczny  $V(f_s)$  może się zmienić. W referacie przedstawię dwa rezultaty dotyczące  $\delta$ -stałych deformacji liniowych postaci  $f_0 + sg$ ,  $g$  holomorficzna i  $g(0, 0) = 0$  :

1. warunek konieczny i wystarczający istnienia  $\delta$ -stałych deformacji liniowych  $f_0$ ,
2. pełną listę typów topologicznych w takich deformacjach.

Wyniki podane są w terminach diagramów Enriquesa osobliwości krzywych.

## KONSTRUKCJA LOKALNEJ KRZYWEJ ZESPOLONEJ O ZADANYM TYPIE OSOBLIWOŚCI

**Andrzej Lenarcik**

Politechnika Świętokrzyska

e-mail: [andrzej.lenarcik@gmail.com](mailto:andrzej.lenarcik@gmail.com)

Rozważamy pierścień szeregów zbieżnych dwóch zmiennych zespolonych. Szereg nazywamy osobliwym, gdy znika w zerze wraz z pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu. Rozważamy osobliwości izolowane (odpowiadają szeregom zredukowanym). Każda osobliwość rozkłada się na skończoną liczbę szeregów nierozkładalnych (gałęzi). Typ topologiczny osobliwości zależy od charakterystyk gałęzi oraz od ich wzajemnych krotności przecięcia. Eggers [1] reprezentował typ osobliwości za pomocą zwięzłego grafu skonstruowanego za pomocą rozwinięcia Puiseux. Analogiczna konstrukcja za pomocą dystansu logarytmicznego Płoskiego [2] - bez odwoływania się do układu współrzędnych - została przedstawiona w [3]. Otrzymane drzewo posiada dwa typy wierzchołków (czarne i białe) oraz dwa typy krawędzi (ciągłe i przerywane). Ponadto to każdego czarnego wierzchołka przyporządkowana jest liczba wymierna w postaci dekoracji. Podczas referatu zostaną scharakteryzowane grafy, które mogą być drzewami osobliwości.

[1] H. Eggers, Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten, *preprint*, Bonner Math. Schriften 147, Universität Bonn, Bonn, 1982.

[2] A. Płoski, Remarque sur la multiplicité d'intersection des branches planes, *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 1985, 33(11-12), 601-605

[3] A. Lenarcik, Eggers tree and jacobian Newton polygon, *manuscripta math.*, 2013, 142, 233-244

## GEOMETRIA LIPSCHITZOWSKA ROZMAITOŚCI Z OSOBLIWOŚCIAMI

Maria Michalska

Uniwersytet Łódzki

e-mail: maria.michalska@wmii.uni.lodz.pl

Przedstawię interakcje pomiędzy klasycznymi osobliwościami stożkowymi rozmaitości różniczkowych a geometrią zbiorów algebraicznych rzeczywistych i zespolonych z punktu widzenia ich geometrii lipschitzowskiej. W ostatnich latach odnotowuje się intensywny rozwój badań nad geometrią lipschitzowską rozmaitości algebraicznych zespolonych i rzeczywistych lecz do tej pory niewiele było wiadomo o zachowaniu konkretnych przykładów. W referacie zastosuję podejście geometryczne do problemu, które w szczególności umożliwia charakteryzację geometrii lipschitzowskiej generycznych osobliwości zbiorów algebraicznych oraz redukcję klasyfikacji lipschitzowskiej zbiorów oswojonych i daje po raz pierwszy szeroką gamę przykładów zbiorów algebraicznych quasi-wypukłych, inaczej nazywanych normalnie lipschitzowsko zanurzonymi.

Referat jest głównie oparty na wynikach osiągniętych we współpracy z André Costa (Universidade Estadual de Ceara) i Vincent Grandjean (Universidade Federal de Santa Catarina) w artykułach [1-3].

[1] A. Costa, V. Grandjean, M. Michalska, Characterization of Lipschitz normally embedded complex curves, *Bull. Sci. Math.*, 2024, 190, 103369

[2] A. Costa, V. Grandjean, M. Michalska, One point compactification and Lipschitz normally embedded definable subsets, *preprint*, ArXiv:2304.08555

[3] A. Costa, V. Grandjean, M. Michalska, Global Lipschitz geometry of conic singular sub-manifolds with applications to algebraic sets, *preprint*, ArXiv:2306.14854



## KLASYFIKACJA SPECJALNYCH 2-FLAG DŁUGOŚCI 5 JEST SKOŃCZONA

Piotr Mormul

Uniwersytet Warszawski  
e-mail: mormul@mimuw.edu.pl

Badanie dystrybucji generujących specjalne multi-flagi było zapoczątkowane przez A. Kumpere i J. Rubina w roku 1999 (ich publikacja [1], mocno opóźniona z tzw. powodów technicznych). Takie flagi bezpośrednio uogólniają klasyczne 1-flagi, czyli flagi Goursata. Podstawowe informacje o specjalnych 2-flagach znajdują się w pracy [2]. Z kolei w preprincie [3] lokalna klasyfikacja specjalnych 2-flag została doprowadzona do długości 4.

Przy długości 1 jest tylko jeden model lokalny (tzn. jedna lokalna geometria, tzw. jet-like). Przy długości 2 – już dwie, przy długości 3 – już siedem, wreszcie przy długości 4 możliwe są aż 34 lokalne geometrie specjalnych 2-flag.

10 lat po tamtym preprincie, w pracy [4] mogliśmy z F. Pelletierem tylko powtórzyć powyższy wynik, eksponując za to duży znak zapytania dotyczący lokalnej klasyfikacji przy długości 5 (patrz strona 195 w [4]).

Ostatnio, z dużym udziałem A. Webera w zakresie efektywnych obliczeń infinitesimalnych symetrii specjalnych 2-flag, wreszcie uzyskana została odpowiedź dotycząca długości 5: **klasyfikacja lokalna specjalnych 2-flag przy długości flagi 5 jest skończona**. Jednakże dokładna ilość lokalnych geometrii takich flag (pewna liczba trzycyfrowa) nie jest jeszcze ustalona.

Pozostaje też szeroko otwarte pytanie dotyczące lokalnej klasyfikacji przy długości 6 (patrz tabela na stronie 195 w pracy [4]). Jest to ważne dlatego, że od dawna wiadomo (sekcja 1.5 w [3]), że przy kolejnej długości 7 pojawia się już parametr niezmienniczy (moduł) w takiej klasyfikacji. Analogiczna krytyczna długość dla flag Goursata to 8. Jest bardzo prawdopodobne, że dla specjalnych 2-flag długość krytyczna okaże się być właśnie 6.

[1] A. Kumpere, J. L. Rubin, Multi-flag systems and ordinary differential equations, *Nagoya Mathematical Journal*, 2002, 166, 1–27

[2] P. Mormul, Singularity classes of special 2-flags, *SIGMA*, 2009, 5, 102, 22 pages (electronic)

[3] P. Mormul, F. Pelletier, Special 2-flags in lengths not exceeding four: a study in strong nilpotency of distributions, *preprint*, ArXiv:1011.1763

[4] P. Mormul, F. Pelletier, Symmetries of special 2-flags, *Journal of Singularities*, 2020, 21, 187–204

## TOPOLOGIA OSWOJONA W STRUKTURACH HENSELOWO MINIMALNYCH

**Krzysztof Jan Nowak**

Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

e-mail: nowak@im.uj.edu.pl

Mój referat oparty jest na pracy [4] (w recenzji), w której kontynuuję swoje badania z prac [1,2,3]. Dotyczy on topologii w strukturach henselowo minimalnych, których aksjomatyczna teoria została niedawno wprowadzona przez Cluckersa–Halupczoka–Rideau. Zakładam dodatkowo, że grupa waluacji i ciało rezydualne są ortogonalne i że zbiory definiowalne w sorcie grupy waluacji to dokładnie zbiory definiowalne w języku grup uporządkowanych. Ten naturalny warunek jest spełniony przez wiele klasycznych struktur na ciałach henselowskich, w tym ciałach henselowskich ze strukturą analityczną, ciałach  $V$ -minimalnych, czy też wielomianowo ograniczonych strukturach  $o$ -minimalnych z podpierścieniem wypukłym. Uzyskuję wiele rezultatów dotyczących funkcji i zbiorów definiowalnych; m.in. istnienie granicy dla funkcji definiowalnych jednej zmiennej, twierdzenie o domkniętości, kilka nie-archimedesowych wersji nierówności Łojasiewicza, twierdzenie o zanurzeniu dla regularnych przestrzeni definiowalnych oraz definiowalną ultranormalność i ultraparazwartość definiowalność LC-przestrzeni Hausdorffa.

[1] K.J. Nowak, Some results of algebraic geometry over Henselian rank one valued fields, *Sel. Math. New Ser.*, 2017, 23, 455–495

[2] K.J. Nowak, A closedness theorem and applications in geometry of rational points over Henselian valued fields, *J. Singul.*, 2020, 21, 212–233

[3] K.J. Nowak, A closedness theorem over Henselian fields with analytic structure and its applications, *In: Algebra, Logic and Number Theory, Banach Center Publ.*, 2020, 121, 141–149

[4] K.J. Nowak, Tame topology in Hensel minimal structures, *preprint*, arXiv:2103.01836 [math.AG]

DEFEKT NIEROZKŁADALNYCH KRZYWYCH PŁASKICH Z PROSTYMI  
OSOBLIWOŚCIAMI

**Piotr Pokora**

Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

e-mail: piotr.pokora@up.krakow.pl

Podczas wykładu zostaną omówione wyniki uzyskane w pracy [2]. Głównym celem referatu będzie omówienie zagadnienia defektu krzywych płaskich. Pojęcie to zostało wprowadzone w pracy [1] w kontekście badania wolności krzywych. Z grubsza ujmując, defekt dla zredukowanej krzywej płaskiej mierzy rozbieżność od własności wolności krzywych w języku minimalnego stopnia relacji syzygii ideału jacobianowego i całkowitej liczby Tjuriny. Naszymi głównymi wynikami są oszacowania dolne defektu dla pewnych klas nierozkładalnych krzywych, które dopuszczają tylko ADE osobliwości, oraz kryterium pozwalające stwierdzić kiedy dana krzywa płaska parzystego stopnia dopuszczająca tylko ADE osobliwości nie jest wolna. Kryterium to jest optymalne i wyraża się w języku wykładnika Arnolda krzywej.

[1] A. Dimca, On rational cuspidal plane curves and the local cohomology of Jacobian rings., *Comment. Math. Helv.*, 2019, 94(4), 689 – 700

[2] P. Pokora, Defect of irreducible plane curves with simple singularities, *preprint*, arXiv:2404.03341

## O KROTNOŚCI NIEWŁAŚCIWEJ

Adam Różycki

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego

e-mail: adam.rozycki@wmii.uni.lodz.pl

Niech  $f: (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ ,  $m > n$  będzie niezdegenerowanym kielkiem w 0 odwzorowania o izolowanym zerze. W referacie podaję prostą formułę na krotność niewłaściwą odwzorowania  $f$  wyrażoną w języku diagramu Newtona. Jest to wspólny wynik z Grzegorzem Oleksikiem.

[1] R. Achilles, P. Tworzewski, T. Winiarski, On improper isolated intersection in complex analytic geometry, *Annales Polonici Mathematici*, 1990, 51(1), 21–36

[2] S. Spodzieja, Multiplicity and the Łojasiewicz exponent, *Annales Polonici Mathematici*, 2000, 73(3), 257–267

[3] P. Mondal, How many zeroes? Counting solutions of systems of polynomials via toric geometry at infinity, *CMS/CAIMS BM*, volume 2, 2021

# Topologia i teoria mnogości

ORGANIZATORZY:

ALEKSANDER BŁASZCZYK (UŚ), WIESŁAW KUBIŚ (UKSW), ANDRZEJ KUCHARSKI (UŚ),  
SZYMON PLEWIK (UŚ)

## LIPSCHITZOWSKIE OBRAZY PRZESTRZENI HIPERWYPUKŁYCH

**Judyta Bąk**

Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach

e-mail: judyta.bak@ujk.edu.pl

(wyniki uzyskane z Tarasem Banakhem, Joanną Garbulińską-Węgrzyn, Magdaleną Nowak i Michałem Popławskim)

Przestrznią hiperwypukłą nazywamy przestrzeń metryczną, w której każda rodzina kul domkniętych  $\mathcal{B} = \{\bar{B}(x_i, r_i) : i \in I\}$  taka, że  $d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$  dla dowolnych  $i, j \in I$  ma niepusty przekrój.

Podczas referatu opowiemy o uzyskanych wynikach charakteryzujących lipschitzowskie obrazy przestrzeni:

- hiperwypukłych,
- zwartych hiperwypukłych,
- ośrodkowych hiperwypukłych.

[1] T. Banakh, J. Bąk, J. Garbulińska-Węgrzyn, M. Nowak, M. Popławski, Characterizing Lipschitz images of injective metric spaces, *preprint*, ArXiv:2405.01860

$P$ -PRZESTRZENIE JAKO GRANICE ODWROTNE**Wojciech Bielas**Uniwersytet Śląski w Katowicach  
e-mail: wojciech.bielas@us.edu.pl**Andrzej Kucharski**Uniwersytet Śląski w Katowicach  
e-mail: andrzej.kucharski@us.edu.pl**Szymon Plewik**Uniwersytet Śląski w Katowicach  
e-mail: szymon.plewik@us.edu.pl

Nazwa  $P$ -przestrzeń została użyta po raz pierwszy przez L. Gillmana i M. Henriksena w roku 1954, jako skrót określenia *przestrzeń pseudodyskretna*, co z kolei oznacza przestrzeń całkowicie regularną  $X$ , w której dla każdej funkcji ciągłej  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  i każdego punktu  $x \in X$  istnieje takie otoczenie otwarte  $U \ni x$ , że zacieśnienie  $f|_U$  jest funkcją stałą. W zakresie przestrzeni całkowicie regularnych powyższy warunek jest równoważny temu, że przekrój przeliczalnie wielu zbiorów otwartych jest otwarty. Topologię dowolnej przestrzeni można wzmocnić dołączając do niej wszystkie podzbiory typu  $G_\delta$ . Symbolem  $(X)_\delta$  oznaczmy przestrzeń  $X$  z topologią powiększoną o podzbiory typu  $G_\delta$ .

Rozważmy relację podziałową  $X \rightarrow (Y)_2^1$ , która oznacza, że dla każdego podziału przestrzeni topologicznej  $X = X_0 \cup X_1$ , przestrzeń  $Y$  ma zanurzenie w podprzestrzeń  $X_0$  lub w podprzestrzeń  $X_1$ . Przykładem, w jaki sposób zdefiniowana relacja podziałowa rozróżnia przestrzenie topologiczne, są warunki  $2^\omega \not\rightarrow (2^\omega)_2^1$  (zbiór Cantora można przedstawić jako sumę dwóch zbiorów Bernsteina) oraz  $\mathbb{Q} \rightarrow (\mathbb{Q})_2^1$ . W 2019 r. A. Dow udowodnił, że

- każdy podzbiór gęsty przestrzeni  $(2^{\omega_1})_\delta$  zawiera homeomorficzne kopie wszystkich  $P$ -przestrzeni mocy i wagi  $\aleph_1$ ,
- jeśli  $X \subseteq \beta\omega$ , to podprzestrzeń  $X$  zawiera homeomorficzną kopię przestrzeni  $(2^{\omega_1})_\delta$  lub dopełnienie  $\beta\omega \setminus X$  zawiera homeomorficzną kopię pewnego podzbioru gęstego przestrzeni  $(2^{\omega_1})_\delta$ .

Wynika stąd, że relacja podziałowa  $\beta\omega \rightarrow (Y)_2^1$  zachodzi dla dowolnej  $P$ -przestrzeni  $Y$ , która jest mocy i wagi  $\aleph_1$ .

Celem referatu będzie pokazanie, że wśród podzbiorów gęstych przestrzeni  $(2^{\omega_1})_\delta$  istnieje podprzestrzeń  $\Sigma$ , która ma zanurzenie w każdy inny podzbiór gęsty przestrzeni  $(2^{\omega_1})_\delta$ . Otrzymujemy w ten sposób warunek  $\beta\omega \rightarrow (\Sigma)_2^1$ , przy czym przestrzeń  $\Sigma$  jest wagi  $\mathfrak{c}$ .

[1] W. Bielas, A. Kucharski, Sz. Plewik, Inverse limits which are  $P$ -spaces, *Topology and its Applications*, 2022, 312, Paper No. 108064

[2] A. Dow, More topological partition relations on  $\beta\omega$ , *Topology and its Applications*, 2019, 259, 50–66

[3] L. Gillman, M. Henriksen, Concerning Rings of Continuous Functions, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1954, 77(2), 340–362

MAŁA ALGEBRA BOOLE'A Z WŁASNOŚCIĄ GROTHENDIECKA, ALE BEZ  
WŁASNOŚCI NIKODYMA

**Damian Głodkowski**

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: dglodkowski@impan.pl

Dla danej algebry Boole'a  $\mathbb{B}$  przez  $\text{St}(\mathbb{B})$  będziemy oznaczać jej przestrzeń Stone'a. Mówimy, że  $\mathbb{B}$  ma własność Grothendiecka, jeśli każdy ciąg miar Radona na  $\text{St}(\mathbb{B})$ , który jest zbieżny w topologii słabej\* (rozpatrywanej w przestrzeni dualnej do  $C(\text{St}(\mathbb{B}))$ ), jest także zbieżny w topologii słabej. Algebra  $\mathbb{B}$  ma własność Nikodyma, jeśli każdy ciąg miar Radona na  $\text{St}(\mathbb{B})$ , który jest zbieżny na zbiorach otwarto-domkniętych, jest ograniczony w normie. W 1984 roku Talagrand skonstruował - przy założeniu hipotezy continuum - przykład algebry Boole'a, która ma własność Grothendiecka, ale nie ma własności Nikodyma. Problem istnienia takiej algebry nadal pozostaje otwarty w ZFC.

Podczas odczytu opowiem o niesprzecznej konstrukcji algebry Boole'a z własnością Grothendiecka i bez własności Nikodyma przy dowolnie dużej wartości continuum. Skonstruowana przez nas algebra ma moc  $\omega_1$  i składa się z borelowskich podzbiorów zbioru Cantora. Referat będzie oparty na pracy [1].

[1] D. Głodkowski, A. Widz, Epic math battle of history: Grothendieck vs Nikodym, *preprint*, ArXiv:2401.13145



WYMIAR POKRYCIOWY PRZESTRZENI ZWARTEJ A OTWARTOŚĆ  
MNOŻENIA W JEJ ALGEBRZE FUNKCJI CIĄGŁYCH

**Tomasz Kania**

Uniwersytet Jagielloński & Czeska Akademia Nauk w Pradze  
e-mail: tomasz2.kania@uj.edu.pl

Andrzej Komisarski pokazał że w przypadku skalarów rzeczywistych, dla danej przestrzeni zwartej Hausdorffa  $X$  mnożenie w algebrze funkcji ciągłych  $C(X)$  jest odwzorowaniem dokładnie gdy przestrzeń ta jest zero-wymiarowa. Wykażemy, że w przypadku skalarów zespolonych sytuacja ma się zgoła inaczej inaczej:  $C(X)$  ma otwarte mnożenie wtedy i tylko wtedy, gdy ma jednostajnie otwarte mnożenie, a tak jest wtedy i tylko wtedy, gdy wymiar pokryciowy wynosi co najwyżej 1. Wynik jest wycinkiem z szerszego kręgu wyników dotyczących otwartości mnożenia w algebrach funkcyjnych. Praca wspólna z N. Maślany.

[1] A. Komisarski, A connection between multiplication in  $C(X)$  and the dimension of  $X$ , *Fund. Math.*, 2006 (189) 2, 149–154.

[2] T. Kania, N. Maślany, Differential embeddings into algebras of topological stable rank 1, *preprint*, [arXiv:2301.02320](https://arxiv.org/abs/2301.02320)

O WŁASNOŚCIACH RAMSEY'OWSKICH ODLEGŁOŚCI NA  
NIEOŚRODKOWYCH SFERACH

**Piotr Koszmider**

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: piotr.math@proton.me

Niech  $\kappa$  będzie nieskończoną liczbą kardynalną. Lemat Riesz implikuje, że dla każdego  $\varepsilon > 0$  w każdej  $\kappa$ -wymiarowej unormowanej przestrzeni wektorowej  $X$  istnieje  $Y \subseteq X$  mocy  $\kappa$  zawarty w sferze jednostkowej  $S_X = \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$  taki, że  $1 - \varepsilon < \|y - y'\|$  dla każdych różnych  $y, y' \in Y$ .

Korzystając np. z twierdzenia Ramsey'a dla  $\kappa = \omega$  można wybrać nieskończony  $Y$ , który będzie spełniał  $1 - \varepsilon < \|y - y'\| < 1 + \varepsilon$  dla każdych różnych  $y, y' \in Y$ . Rozważamy nieośrodkowe przestrzenie Banacha  $X$  i pokazujemy wpływ różnych dodatkowych założeń teoriomogściowych na możliwość wybrania  $Y \subseteq S_X$  z powyższą własnością dla  $\kappa = \omega_1$ .

[1] Piotr Koszmider, On Ramsey-type properties of the distance in nonseparable spheres, *preprint*, ArXiv:2308.07668

## ULTRAFILTRY ORAZ PRZESTRZENIE TOPOLOGICZNE

**Krzysztof Kowitz**

Uniwersytet Gdański

e-mail: [krzysztof.kowitz@ug.edu.pl](mailto:krzysztof.kowitz@ug.edu.pl)

Opowiem o ostatnich wynikach uzyskanych wspólnie z Rafałem Filipowem i Adamem Kwelą. Referat będzie oparty na pracach [1] oraz [2]. Podczas prezentacji skupię się na związku pomiędzy porządkiem Katětova, a ultrafiltrami zdefiniowanymi przez ideały. Podam warunki wystarczające dla niektórych ideałów (przy założeniu CH) do uzyskania równoważności: ideał nie jest poniżej innego ideału w porządku Katětova wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ultrafiltr zdefiniowany przez ten ideał, który nie jest ultrafiltrem zdefiniowanym przez drugi ideał.

Wiadomo, że przestrzeń Hindmana jest przetrzenię różnicowo zwartą. W części związanej z przestrzeniami topologicznymi pokażę, że istnieje przestrzeń różnicowo zwarta, która nie jest przestrzenią Hindmana.

[1] R. Filipów, K. Kowitz, A. Kwela, Characterizing existence of certain ultrafilters, *Annals of Mathematics*, 2022, 173(9), 31.

[2] R. Filipów, K. Kowitz, A. Kwela, A unified approach to Hindman, Ramsey and van der Waerden spaces, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2307.06907>.

## O SUMACH ALGEBRAICZNYCH, DRZEWACH I ZBIORACH MIZERNYCH W PRZESTRZENI CANTORA

**Marcin Michalski**Politechnika Wrocławska, Wydział Matematyki  
e-mail: marcin.k.michalski@pwr.edu.pl

Niech  $2^\omega$  oznacza przestrzeń Cantora ze standardowym dodawaniem  $+$  modulo 2 po współrzędnych i niech  $\mathcal{I}$  niech będzie jednym z  $\sigma$ -ideałów: zbiorów miary zero, mizernih, ich przekroju lub  $\mathcal{E}$  - generowanego przez domknięta zbiory miary zero. Podczas referatu przekonamy się, że dla dowolnego zbioru  $F \in \mathcal{I}$  oraz drzewa  $T \subseteq 2^{<\omega}$ , które jest (jednomiernie) doskonałe lub Silvera, istnieje drzewo  $T' \subseteq T$  tego samego typu takie, że dla dowolnego  $n \in \omega$

$$F + \underbrace{[T'] + [T'] + \cdots + [T']}_{n\text{-razy}} \in \mathcal{I}.$$

Otrzymamy również nieco słabszą tezę dla drzew Spinasa.

Skupimy się głównie na przypadku, gdy  $\mathcal{I}$  to rodzina zbiorów mizernih.

Powyższe rezultaty zostały osiągnięte wspólnie z Robertem Rałowskim oraz Szymonem Żeberskim w pracy [1].

[1] M. Michalski, R. Rałowski, Sz. Żeberski, On algebraic sums, trees and ideals in the Cantor space, *preprint*, arXiv:2405.13775

## ŁAŃCUCHY W $P(\omega)$ I OPERATORY ROZSZERZENIA

**Grzegorz Plebanek**

Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

e-mail: grzegorz.plebanek@math.uni.wroc.pl

Niech  $\{A_t : t \in T\}$ , dla pewnego zbioru  $T \subseteq [0, 1]$ , będzie rodziną podzbiorów  $\omega$ , stanowiącą łańcuch względem relacji prawie zawierania. Rozważenie generowanej przez taką rodzinę algebry Boole'a i algebry ilorazowej prowadzi do konstrukcji zwartej prostej i jej rozszerzenia o przeliczalny zbiór punktów izolowanych.

Konstrukcja tego typu pozwala udowodnić nierozstrzygalność pewnego problemu, pochodzącego z analizy funkcjonalnej. Wyniki pochodzą z atykułu z Maciejem Korpalskim i innej jego pracy, napisanej wraz z Antonio Aviléssem.

PRZESTRZENIE FUNKCYJNE NA PRZESTRZENIACH ZWARTYCH  
 $\omega$ -CORSONA

**Krzysztof Zakrzewski**  
Uniwersytet Warszawski  
e-mail: Krzysztof.Zakrzewski777@wp.pl

Dla zbioru indeksów  $\Gamma$  i liczby kardynalnej  $\kappa$ ,  $\Sigma_\kappa$ -produkt prostych rzeczywistych  $\Sigma_\kappa(\mathbb{R}^\Gamma)$  składa się z ciągów z  $\mathbb{R}^\Gamma$  o mniej niż  $\kappa$  wielu niezerowych wyrazach. Przestrzeń zwartą nazwiemy przestrzenią zwartą  $\kappa$ -Corsona jeżeli jest ona homeomorficzna z pewnym podzbiorem  $\Sigma_\kappa(\mathbb{R}^\Gamma)$  dla pewnego zbioru indeksów  $\Gamma$ . Dla  $\kappa = \omega_1$  jest to znana klasa przestrzeni zwartych Corsona. Rozpatrujemy również klasę szerszą od klasy kompaktów  $\omega$ -Corsona, klasę przestrzeni  $NY$  zwartych badaną przez Nakhmansoną oraz Yakovleva, jak również Marciszewskiego, Plebana i Zakrzewskiego. Dla przestrzeni Tichonowa  $X$ , niech  $C_p(X)$  oznacza przestrzeń funkcji ciągłych rzeczywistych na przestrzeni  $X$  wyposażoną w topologię punktowej zbieżności.

Pokażemy, że klasy przestrzeni zwartych  $NY$  oraz przestrzeni zwartych  $\omega$ -Corsona  $K$  są niezmiennicze przy liniowych homeomorfizmach przestrzeni funkcyjnych  $C_p(K)$ .

[1] L.B. Nakhmanson, N.N. Yakovlev, Bcompacta lying in  $\sigma$ -products, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1981, 22(4), 705–719

[2] W. Marciszewski, G. Plebanek, K. Zakrzewski, Digging into the classes of  $\kappa$ -Corson compact spaces, *Isr. J. Math.*, accepted

## O SUMACH ALGEBRAICZNYCH, DRZEWACH I ZBIORACH MIARY ZERO W PRZESTRZENI CANTORA

**Szymon Żeberski**

Politechnika Wrocławska

e-mail: [szymon.zeberski@pwr.edu.pl](mailto:szymon.zeberski@pwr.edu.pl)

Będziemy pracować w przestrzeni Cantora  $2^\omega$ . Niech  $T$  będzie drzewem doskonałym, równomiernie doskonałym lub drzewem Silvera. Dla dowolnego  $A \in \mathcal{N}$  istnieje  $T' \subseteq T$  takiego samego rodzaju jak  $T$  czyniące zadość warunkowi

$$A + \underbrace{[T'] + [T'] + \cdots + [T']}_{n\text{-razy}} \in \mathcal{N}$$

dla każdego  $n \in \omega$ .

Przedstawione wyniki zostały uzyskane wspólnie z Robertem Rałowskim i Marcinem Michalskim i pochodzą z pracy [1].

[1] R. Rałowski, M. Michalski, S. Żeberski, On algebraic sums, trees and ideals in the Cantor space, *preprint*, [arxiv.org/abs/2405.13775](https://arxiv.org/abs/2405.13775)





# Sesja ogólna, poświęcona innym zagadnieniom matematycznym

ORGANIZATORZY:

KOMITET ORGANIZACYJNY 9. FMP

WOKÓŁ ROZWIĄZAŃ CIĄGLYCH LINIOWEGO RÓWNIANIA FUNKCYJNEGO  
ZE SŁABO ZWEŻAJĄCĄ FUNKCJĄ O WARTOŚCIACH LOSOWYCH**Karol Baron**

Uniwersytet Śląski

e-mail: karol.baron@us.edu.pl

Niech  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  będzie przestrzenią probabilistyczną, a  $(X, \rho)$  przestrzenią metryczną zupełną i ośrodkową. Oznaczmy przez  $\mathcal{B}$  rodzinę wszystkich podzbiorów borelowskich przestrzeni  $(X, \rho)$ . Niech  $f : X \times \Omega \rightarrow X$  będzie funkcją mierzalną względem  $\sigma$ -ciała produktowego  $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$  i spełniającą warunek

$$\int_{\Omega} \rho(f(x, \omega), f(z, \omega)) \mathbb{P}(d\omega) \leq \beta(\rho(x, z)) \quad \text{dla } x, z \in X$$

z taką wklęsłą funkcją  $\beta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , że  $\beta(t) < t$  dla  $t \in (0, \infty)$ , a ponadto

$$\int_{\Omega} \rho(f(x_0, \omega), x_0) \mathbb{P}(d\omega) < \infty$$

dla pewnego  $x_0 \in X$ .

Rozważać będziemy ciąg iteracji funkcji  $f$  określony wzorami

$$f^0(x, \omega_1, \omega_2, \dots) = x, \quad f^n(x, \omega_1, \omega_2, \dots) = f(f^{n-1}(x, \omega_1, \omega_2, \dots), \omega_n)$$

dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$  i  $(\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ , słabą granicę tego ciągu oraz problem istnienia i jednoznaczności rozwiązań  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  równania

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} \varphi(f(x, \omega)) \mathbb{P}(d\omega) + F(x)$$

w pewnych klasach funkcji ciągłych.

## MONOTONICZNA WERSJA TWIERDZENIA AVRAMESCU

Michał Beldziński

Instytut Matematyki

Politechnika Łódzka

93-590 Łódź

e-mail: [michal.beldzinski@p.lodz.pl](mailto:michal.beldzinski@p.lodz.pl)

Punktem wyjścia odczytu będzie omówienie twierdzenia Avramescu (por. [1]) mówiącego o rozwiązywalności układu dwóch równań nieliniowych, z których pierwsze jest traktowane twierdzeniem o punkcie stałym Banacha, a drugie – twierdzeniem Schaudera. Prowadzi nas do obserwacji, iż kluczowa jest jednoznaczna rozwiązywalność pierwszego z równań wraz z ciągłą zależnością od parametru, a nie zastosowanie twierdzenia Banacha. Stąd pomysł zastąpienia zasady Banacha przez parametryczną wersję twierdzenia Browdera-Minty’ego przedstawioną w [2], pozwalający uzyskać, opisane w [3], uogólnienia twierdzenia Avramescu. Podobnie jak w [4], podane będą odniesienia do klasycznego twierdzenia Krasnosielskiego o punkcie stałym. Przykładem ilustrującym zastosowania otrzymanych metod będzie układ postaci

$$\begin{cases} -\left(\varphi(x, w(x), |u'(x)|^{p-1})|u'(x)|^{p-2}u'(x)\right)' = f(x, u(x), w(x)) & \text{dla } x \in (0, 1), \\ -(|w'(x)|^{q-2}w'(x))' = g(x, u(x), w(x)) & \text{dla } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ w(0) = \int_0^1 h_0(w(\xi))d\eta_0(\xi), \quad w(1) = \int_0^1 h_1(w(\xi))d\eta_1(\xi). \end{cases}$$

W powyższych równaniach  $\varphi: [0, 1] \times \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  i  $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  są funkcjami Carathéodory’ego spełniającymi odpowiednie warunki wzrostu i monotoniczności, odwzorowania  $g: [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_0, h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  są ciągłe, zaś  $\eta_0, \eta_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mają ograniczone wahanie.

[1] C. Avramescu, Some remarks on a fixed point theorem of Krasnoselskii, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2003, 5, 1–15

[2] M. Beldziński, M. Galewski, I. Kossowski, Dependence on parameters for nonlinear equations—abstract principles and applications, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, 45(3), 1668–1686

[3] M. Beldziński, M. Galewski, I. Kossowski, On a version of hybrid existence result for a system of nonlinear equations, *Advanced Nonlinear Studies*, 2023, 23 (1), 20230112

[4] I. Benedetti, T. Cardinali, R. Precup, Fixed point–critical point hybrid theorems and application to systems with partial variational structure, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 2021, 23, 63

ZASTOSOWANIE ZASADY WAŻEWSKIEGO W PROBLEMIE  
CHARAKTERYZACJI ROZKŁADÓW PRAWDOPODOBIENSTWA

**Mariusz Bieniek**

Instytut Matematyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej  
e-mail: [mariusz.bieniek@umcs.lublin.pl](mailto:mariusz.bieniek@umcs.lublin.pl)

W referacie omówiony zostanie problem charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa przez funkcję regresji statystyk porządkowych

$$\mathbb{E}(h(X_{r+\ell:n}) \mid X_{r:n} = x) = \xi(x),$$

gdzie  $h$  oraz  $\xi$  są znanymi funkcjami, a  $X_{j:n}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , oznaczają statystyki porządkowe próby losowej z nieznanego rozkładu prawdopodobieństwa  $F$ . Wyznamy postać dystrybuanty  $F$  w zależności od  $h$ ,  $\xi$  oraz rozwiązania pomocniczego układu równań różniczkowych. Następnie w przypadku  $\ell = 2$  udowodnimy jednoznaczność charakteryzacji oraz, przy użyciu zasady Ważewskiego, podamy warunki konieczne i dostateczne na to, aby funkcja  $\xi$  była funkcją regresji dla statystyk porządkowych z pewnego rozkładu  $F$ .

PROBLEM STABILNOŚCI DLA GRAFÓW CYRKULANTNYCH O  
BEZKWADRATOWEJ LICZBIE WIERZCHOŁKÓW

**Bartłomiej Bychawski**

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: bartlomiej.bychawski@student.uj.edu.pl

Produktem prostym grafów  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ ,  $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$  nazywamy graf o zbiorze wierzchołków równym  $V_{\text{prod}} = V_1 \times V_2$  oraz zbiorze krawędzi  $E_{\text{prod}} = \{((v_1, v_2), (w_1, w_2)) \in V_{\text{prod}} \times V_{\text{prod}} \mid (v_1, w_1) \in E_1 \text{ oraz } (v_2, w_2) \in E_2\}$ . Powstały graf oznaczamy  $\Gamma_1 \times \Gamma_2 = (V_{\text{prod}}, E_{\text{prod}})$ , a  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  nazywamy jego składowymi.

Narzuca się pytanie – jak wygląda grupa symetrii produktu grafów  $\text{Aut}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ ? Zawsze zachodzi  $\text{Aut}(\Gamma_1) \times \text{Aut}(\Gamma_2) \leq \text{Aut}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ , jednak nie zawsze zachodzi równość. Kompletniej odpowiedzi w powyższej kwestii, dla przypadku gdy obydwa grafy  $\Gamma_1, \Gamma_2$  nie są dwudzielne udzielił Dörfler w 1974 roku. W przypadku gdy któryś z grafów jest dwudzielny, problem pozostaje nierozwiązany. Najprostrzym grafem dwudzielnym jest  $K_2$ , czyli dwa wierzchołki połączone krawędzią. Naturalnym jest więc zapytanie, jak wygląda  $\text{Aut}(\Gamma \times K_2)$  dla danego  $\Gamma$ ?

Oczekiwaną odpowiedzią jest  $\text{Aut}(\Gamma) \times \mathbb{Z}_2$ , jednak nie zawsze jest to prawda. Graf  $\Gamma$  nazywamy stabilnym, gdy  $\text{Aut}(\Gamma \times K_2) = \text{Aut}(\Gamma) \times \mathbb{Z}_2$ . Powyższa równość pociąga za sobą także  $\text{Aut}(\Gamma \times B) = \text{Aut}(\Gamma) \times \text{Aut}(B)$  dla wielu grafów dwudzielnych  $B$ .

Ze względu na chaotyczną naturę grafów, badacze zawiązują się do specjalnych, bardziej ustrukturyzowanych rodzin. Taką rodziną są grafy Cayleya. Są one tworzone na podstawie dwóch parametrów – grupy skończonej  $G$  oraz jej podzbioru  $S \subseteq G \setminus \{e_G\}$  zamkniętego na branie odwrotności. W takim grafie zbiorem wierzchołków są elementy grupy  $G$ , a wierzchołki  $x, y \in G$  są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy gdy  $x^{-1}y \in S$ . Graf ten oznaczamy  $\text{Cay}(G, S)$ .

Stabilność okazuje się powszechną własnością, stąd charakteryzuje się te niestabilne, co zwykle się nazywać problemem stabilności. Problem okazał się wymagający, nawet dla grafów Cayleya gdy  $G = \mathbb{Z}_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Grafy takie nazywamy cyrkulantnymi.

Pierwszym wynikiem klasyfikującym niestabilne grafy cyrkulantne była praca [1], w której B. Fernandez oraz A. Hujdurović udowodnili, że graf cyrkulantny o nieparzystej liczbie wierzchołków jest stabilny dokładnie gdy jest spójny i zredukowany.

Klasyfikacja niestabilnych grafów cyrkulantnych o  $n = 2m$  wierzchołkach do niedawna była nieosiągalna, jednak w 2023 roku A. Hujdurović i I. Kovács odkryli połączenie między problemem stabilności dla grafów Cayleya a własnościami pierścieni Schura ([2, Theorem 1.1]). Stosując to podejście wykazali, że gdy  $m = p^k$  dla pewnej liczby pierwszej  $p > 2$ , to dla każdego spójnego, niedwudzielnego i niestabilnego grafu  $\Gamma = \text{Cay}(\mathbb{Z}_{2m}, S)$

- istnieje niezerowe  $h \in 2\mathbb{Z}_n$ , takie że  $S \cap 2\mathbb{Z}_n = S \cap 2\mathbb{Z}_n + h$ ;
- lub  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_n, S) \cong \text{Cay}(\mathbb{Z}_n, S + \frac{n}{2})$ .

W dowodzie powyższej klasyfikacji większość lematów zakłada tylko  $2 \nmid m$ . Dzięki temu, udało się wykazać prawdziwość powyższej klasyfikacji gdy  $m$  jest dowolną nieparzystą liczbą bezkwadratową.

Referat na podstawie wspólnej pracy z Jakubem Byszewskim.

[1] B. Fernandez, A. Hujdurović, Canonical double covers of circulants, *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 2022, 154, 49–59

[2] A. Hujdurović, I. Kovács, Stability of Cayley graphs and Schur rings, *preprint*, ArXiv:2308.01182

ZASTOSOWANIA ALGEBRY BINARNEJ DO WYBRANYCH ZAGADNIĘŃ W  
ELEKTRONICE ORAZ MATEMATYCE

**Paweł Chłosta**

Akademia Humanistyczno-Ekonomiczna w Łodzi

e-mail: pchlosta@ahe.lodz.pl

Celem wystąpienia jest prezentacja zastosowań algebry binarnej do wybranych zagadnień w elektronice oraz matematyce, takich jak: wyprowadzanie ścisłych wzorów dla początkowych dowolnej skończonej liczbie liczb pierwszych, labirynt ( dywan) liczb pierwszych otrzymany na podstawie wartości dodatnich oraz ujemnych współczynników dyskretnej, binarnej funkcji OTA, prezentacja trójkątnego binarnego fraktala oraz fraktala binarnego dyskretnej funkcji kwadratowej, sortowanie algebraiczne ciągów słabo monotonicznych, ścisły wzór funkcji dla kodu Graya, ścisłe wzory wybranych okresowych bipolarnych i unipolarnych funkcji falowych w teorii sygnałów, przykłady dowodzenia algebraicznego wybranych praw rachunku zdań logiki klasycznej przy użyciu nowej metody dowodzenia Binary Equation Method. Referat będzie oparty na pracach [1, 2].

[1] P. Chłosta, *Fundamentals of Binary Algebra, Second Edition, BinaryMath*, 2022

[2] P. Chłosta, *Logika Binarna. Tautologie, BinaryMath*, 2024

CENTRALNE TWIERDZENIE GRANICZNE DLA WYKŁADNICZO  
ERGODYCZNYCH W NORMIE FORTET–MOURIERA PROCESÓW  
MARKOWA

Dawid Czapła

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

e-mail: dawid.czapla@us.edu.pl

W ramach referatu zaprezentujemy adaptację centralnego twierdzenia granicznego dla niestacjonarnych, fellerowskich procesów Markowa, przyjmujących wartości w polskiej przestrzeni metrycznej, których półgrupy przejścia są wykładniczo ergodyczne w normie Fortet–Mouriera (zwanej też ograniczoną normą Lipschitza), a jednocześnie nie muszą być względem niej lipschitzowskie.

Dokładniej, przedmiotem naszych rozważań będzie jednorodny w czasie proces Markowa  $\Psi = \{\Psi(t)\}_{t \geq 0}$  o polskiej przestrzeni fazowej  $(X, \rho)$ , którego rozkłady ewoluują w czasie w sposób zadany przez półgrupę Markowa  $\{P_t\}_{t \geq 0}$ , złożoną z operatorów określonych na zbiorze  $\mathcal{M}_1(X)$  borelowskich miar probabilistycznych na  $X$ . Przyjmujemy przy tym następujące założenia:

- (A1) Półgrupa  $\{P_t\}_{t \geq 0}$  jest fellerowska, tj. funkcja  $X \ni x \mapsto \int_X f dP_t \delta_x$  jest ciągła dla każdej ciągłej i ograniczonej funkcji  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  oraz dowolnego  $t \geq 0$  ( $\delta_x$  oznacza tu miarę Diraca w punkcie  $x$ ).
- (A2) Istnieje funkcja ciągła  $V : X \rightarrow [0, \infty)$  oraz takie stałe  $\gamma, \beta > 0$  i  $\delta \in (0, 1)$ , że dla dowolnych miar  $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(X)$  oraz  $t \geq 0$  zachodzi warunek

$$d_{FM}(P_t \mu, P_t \nu) \leq \beta e^{-\gamma t} \left( \int_X V(x) (\mu + \nu)(dx) + 1 \right)^\delta,$$

gdzie  $d_{FM}$  oznacza metrykę indukowaną przez wspomnianą wyżej normę Fortet–Mouriera.

- (A3) Kwadrat funkcji  $V$ , o której mowa w (A2), spełnia ciągłą wersję warunku Lapunowa, tzn. dla pewnych stałych  $a, \Gamma > 0, b \geq 0$  oraz wszelkich  $x \in X$  i  $t \geq 0$  mamy

$$\int_X V^2(y) (P_t \delta_x)(dy) \leq a e^{-\Gamma t} V^2(x) + b.$$

Przypomnijmy tutaj, że odległość  $d_{FM}$  w zbiorze  $\mathcal{M}_1(X)$  wyraża się wzorem

$$d_{FM}(\mu, \nu) := \sup_{f \in \text{Lip}_1^1(X)} \left| \int_X f d(\mu - \nu) \right| \quad \text{dla } \mu, \nu \in \mathcal{M}_1^1(X),$$

gdzie  $\text{Lip}_1^1(X)$  oznacza rodzinę wszystkich funkcji  $f : X \rightarrow [-1, 1]$  spełniających warunek Lipschitza ze stałą nie większą od 1.

Nasze główne twierdzenie (udowodnione w [1]) orzeka, iż przy założeniach (A1)–(A3), proces  $\Psi$  ma dokładnie jeden rozkład stacjonarny  $\mu_* \in \mathcal{M}_1(X)$  (przy czym  $\int_X V^2 d\mu_* < \infty$ ) oraz, że dla każdej ograniczonej funkcji  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  spełniającej warunek  $\int_X g d\mu_* = 0$ , niezależnie od rozkładu początkowego procesu, zachodzi zbieżność

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t g(\Psi(s)) ds \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_g^2) \quad \text{gdzie } t \rightarrow \infty,$$

gdzie  $\sigma_g$  jest pewną nieujemną stałą zależną od  $g$ . Zakładając dodatkowo, że rozpatrywana półgrupa jest stochastycznie ciągła w  $t = 0$ , można też podać praktyczną i związłą reprezentację tej stałej.

W trakcie referatu omówimy także zastosowanie wyżej sformułowanego twierdzenia do rozpatrywanej w [3] (zob. również [2]) klasy kawałkami deterministycznych procesów Markowa, których skoki następują w losowych odstępach czasu o rozkładzie wykładniczym, zaś kształt trajektorii między nimi dyktowany jest przez potoki, przełączane w sposób losowy każdorazowo tuż po wystąpieniu skoku. Warunki zapewniające spełnienie założeń (A1) i (A2) przez półgrupy przejścia takich procesów zostały sformułowane w [3, Theorem 7.1] (własność (A2) wykazana jest w [3, Lemma 5.1]).

Inspiracją do uzyskania omawianego tu rezultatu było [4, Theorem 2.1]. Wynik ten, zapewniający analogiczną tezę (tyle że dla niekoniecznie ograniczonych obserwabli), odnosi się do fellerowskich półgrup Markowa, wykazujących wykładniczą ergodyczność względem normy Wassersteina (Hutchinsona) w formie jednocześnie gwarantującej ich lipschitzowskość. Wymaga się tu bowiem istnienia takich stałych  $\gamma, \beta > 0$ , że dla dowolnych miar  $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^1(X)$  oraz  $t \geq 0$  zachodzi warunek

$$d_W(P_t\mu, P_t\nu) \leq \beta e^{-\gamma t} d_W(\mu, \nu),$$

przy czym  $\mathcal{M}_1^1(X)$  oznacza podzbiór  $\mathcal{M}_1(X)$  złożony z miar względem których funkcja  $\rho(x_0, \cdot)$  jest całkowalna dla pewnego  $x_0 \in X$ , zaś  $d_W$  metrykę indukowaną w tym zbiorze przez normę Wassersteina. Jak wiadomo, w zbiorze  $\mathcal{M}_1^1(X)$  metryka ta wyraża się podobnym wzorem jak  $d_{FM}$ , przy czym supremum przebiega zbiór wszystkich (niekoniecznie ograniczonych) funkcji  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  spełniających warunek Lipschitza ze stałą nie większą od 1.

Powyzszy warunek okazują się jednak praktycznie niemożliwy do zapewnienia (przy rozsądnych założeniach) w przypadku półgrup opisujących dynamikę wyżej wspomnianych kawałkami deterministycznych procesów Markowa, stanowiących przedmiot rozważań [3]. Jednocześnie, jak już wcześniej zaznaczyliśmy, można sformułować relatywnie naturalne warunki gwarantujące wykładniczą ergodyczność tych półgrup względem normy Fortet–Mouriera w sensie założenia (A2). Oczywiście, aby móc zastosować nasz rezultat, niezbędne są jeszcze pewne dodatkowe warunki umożliwiające wykazanie własności (A3), o czym powiemy dokładniej podczas referatu.

[1] D. Czapla, K. Horbach, H. Wojewódka-Ściążko, The central limit theorem for Markov processes that are exponentially ergodic in the Bounded-Lipschitz norm, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 2024, 23(1), nr art. 7.

[2] D. Czapla, On the Existence and Uniqueness of Stationary Distributions for Some Piecewise Deterministic Markov Processes with State-Dependent Jump Intensity, art. przyjęty do druku w *Results in Mathematics*, 2024 (arXiv: 2303.11576).

[3] D. Czapla, K. Horbach, H. Wojewódka-Ściążko, Exponential ergodicity in the bounded-Lipschitz distance for some piecewise-deterministic Markov processes with random switching between flows, *Nonlinear Analysis*, 2022, 215, nr art. 112678.

[4] T. Komorowski, A. Walczuk, Central limit theorem for Markov processes with spectral gap in the Wasserstein metric, *Stochastic Processes and their Applications*, 2012, 122(5), 2155–2184.



## KLAMRY HOPFA, WIĄZARY HOPFA, STERTY HOPFA

Małgorzata Hryniewicka

Uniwersytet w Białymstoku, Wydział Matematyki

e-mail: margitt@math.uwb.edu.pl

Bialgebrą nad ciałem  $\mathbb{K}$  nazywamy system algebraiczny  $(H, \cdot, \Delta, \varepsilon)$ , na który składa się algebra łączna  $(H, \cdot)$ , koalgebra kołączna z kojedynką  $(H, \Delta, \varepsilon)$ , dodatkowo od komnożenia  $\Delta: H \rightarrow H \otimes H$ ,  $x \mapsto \sum x_1 \otimes x_2$  i kojedynki  $\varepsilon: H \rightarrow \mathbb{K}$  wymagamy by były homomorfizmami algebr. Gdy  $(H, \cdot, 1)$  jest algebrą z jedyneką oraz gdy  $\Delta$  i  $\varepsilon$  są homomorfizmami algebr z jedyneką, to mówimy o bialgebrze unitarnej  $(H, \cdot, 1, \Delta, \varepsilon)$ . Algebrą Hopfa nazywamy system algebraiczny  $(H, \cdot, 1, \Delta, \varepsilon, S)$  złożony z bialgebry unitarnej  $(H, \cdot, 1, \Delta, \varepsilon)$  oraz antypody  $S: H \rightarrow H$ . Klasycznym przykładem algebry Hopfa jest algebra grupowa  $H = \mathbb{K}G$  z komnożeniem  $\Delta(g) = g \otimes g$ , kojedynką  $\varepsilon(g) = 1_{\mathbb{K}}$  i antypodą  $S(g) = g^{-1}$ .

Skośną lewostronną klamrą nazywamy system algebraiczny  $(G, \cdot, 1, \circ, e)$  złożony z niepustego zbioru  $G$  oraz operacji binarnych  $\cdot$  i  $\circ$  zadających na  $G$  struktury grup  $(G, \cdot, 1)$  i  $(G, \circ, e)$ , kompatybilnych w sensie  $x \circ (y \cdot z) = (x \circ y) \cdot x^{-1} \cdot (x \circ z)$ .

Klamrą Hopfa nazywamy system algebraiczny  $(H, \cdot, 1, \circ, e, \Delta, \varepsilon, S, T)$  złożony z koalgebry z kojedynką  $(H, \Delta, \varepsilon)$  oraz zadanych na niej struktur algebr Hopfa  $(H, \cdot, 1, \Delta, \varepsilon, S)$  i  $(H, \circ, e, \Delta, \varepsilon, T)$ , kompatybilnych w sensie  $x \circ (y \cdot z) = \sum (x_1 \circ y) \cdot S(x_2) \cdot (x_3 \circ z)$ . Naturalnym przykładem klamry Hopfa jest algebra grupowa  $H = \mathbb{K}G$  gdzie  $G$  jest skośną lewostronną klamrą.

Lewostronnym wiązarem Hopfa nazywamy system algebraiczny  $(H, \cdot, 1, \circ, \Delta, \varepsilon, S, \sigma)$  złożony z koalgebry z kojedynką  $(H, \Delta, \varepsilon)$  oraz operacji binarnych  $\cdot$  i  $\circ$  zadających na  $H$  strukturę algebry Hopfa  $(H, \cdot, 1, \Delta, \varepsilon, S)$  i bialgebry  $(H, \circ, \Delta, \varepsilon)$ , kompatybilnych w sensie  $x \circ (y \cdot z) = \sum (x_1 \circ y) \cdot S\sigma(x_2) \cdot (x_3 \circ z)$  gdzie  $\sigma: H \rightarrow H$  jest endomorfizmem koalgebry z kojedynką.

Twierdzenie. Niech  $(C, \Delta, \varepsilon)$  będzie koalgebrą z kojedynką oraz operacjami binarnymi  $\cdot$  i  $\circ$  zadającymi na  $C$  strukturę algebry Hopfa  $(C, \cdot, 1, \Delta, \varepsilon, S)$  i bialgebry  $(C, \circ, \Delta, \varepsilon)$ . Następujące warunki są równoważne:

(a) Istnieje endomorfizm koalgebry z kojedynką  $\sigma: C \rightarrow C$  zadający na  $C$  strukturę lewostronnego wiązara Hopfa.

(b) Zdefiniujemy operację ternarną  $[-, -, -]: C \otimes C^{\text{cop}} \otimes C \rightarrow C$  wzorem  $[x, y, z] = x \cdot S(y) \cdot z$ . Wtedy  $x \circ [y, z, t] = \sum [x_1 \circ y, x_2 \circ z, x_3 \circ t]$ .

Operacja ternarna zdefiniowana w punkcie (b) zadaje na  $C$  strukturę sterty Hopfa. Stertą Hopfa nazywamy system algebraiczny  $(C, \Delta, \varepsilon, \chi)$  złożony z koalgebry z kojedynką  $(C, \Delta, \varepsilon)$  oraz homomorfizmu koalgebr z kojedynką  $\chi: C \otimes C^{\text{cop}} \otimes C \rightarrow C$ ,  $x \otimes y \otimes z \mapsto [x, y, z]$  spełniającego warunki  $[[x, y, z], t, u] = [x, y, [z, t, u]]$  i  $\sum [x_1, x_2, y] = \sum [y, x_1, x_2] = \varepsilon(x)y$ .

Celem wystąpienia będzie zbadanie związków pomiędzy klamrami Hopfa, wiązarami Hopfa i stertami Hopfa.

[1] I. Angiono, C. Galindo, L. Vendramin, Hopf braces and Yang-Baxter operators, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2017, 145(5), 1981–1995

[2] A. L. Agore, Constructing Hopf braces, *International Journal of Mathematics*, 2019, 30(2), 1850089, 17 pp.

[3] T. Brzeziński, Trusses: Between braces and rings, *Transactions of the American Mathematical Society*, 2019, 372, 4149–4176

[4] T. Brzeziński, M. Hryniewicka, Translation Hopf algebras and Hopf heaps, *preprint*, ArXiv:2303.13154

WZROST GOSPODARCZY A ZACHOWANIE KAPITAŁU NATURALNEGO –  
MODEL DYNAMICZNY

**Marta Kornafel**

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie  
e-mail: [marta.kornafel@uek.krakow.pl](mailto:marta.kornafel@uek.krakow.pl)

W referacie przedstawiony zostanie model wzrostu gospodarczego, uwzględniający zasoby kapitału naturalnego. Zostanie przeanalizowana dynamika modelu w celu identyfikacji możliwych stanów równowagi zapewniających dodatni zasób kapitału naturalnego. Zbadana zostanie możliwość utrzymania zrównoważonego wzrostu wobec rosnącej konsumpcji zasobów.

[1] M. Kornafel, I. Telega, Dynamics of natural capital in neoclassical growth model, *International Journal of Sustainable Economy*, 2020, 12(1):1–24

## O PIERŚCIENIACH Z AMALGAMACJĄ

Marta Nowakowska

Uniwersytet Śląski

e-mail: marta.nowakowska@us.edu.pl

Niech  $A, B$  będą pierścieniami przemiennymi z jedyneką,  $J$  ideałem pierścienia  $B$  oraz  $f : A \rightarrow B$  homomorfizmem pierścieni  $A$  oraz  $B$ . W [1] zostało wprowadzone pojęcie pierścienia z amalgamacją, czyli zbioru postaci  $A \bowtie^f J := \{(a, f(a) + j) \mid a \in A, j \in J\}$  z działaniami dodawania i mnożenia po współrzędnych. Ta konstrukcja uogólnia wiele istniejących konstrukcji np. duplikację pierścienia wzdłuż ideału, idealizację Nagaty czy konstrukcje  $A + XB[X]$  oraz  $A + XB[[X]]$  i jest również związana z klasyczną konstrukcją D.D. Andersona dotyczącą zanurzania pierścienia bez jedynek w pierścień z jedyneką. Ponadto pierścienie z amalgamacją mogą być realizowane jako pullbacki pewnych odwzorowań i mają zastosowania w geometrii algebraicznej.

Na referacie zostaną przedstawione nowe wyniki tzn. wybrane własności i charakteryzacje pierścieni z amalgamacją w sytuacji ogólniejszej, gdy pierścienie  $A$  oraz  $B$  są jedynie łączne (bez jedynek) rozszerzając tym samym istniejące wyniki dla pierścieni przemiennych. W szczególności zostaną przedstawione opisy pierścieni z amalgamacją należących do wybranych klas radykalnych. Co więcej, zostaną użyte prostsze narzędzia niż dla pierścieni przemiennych, które nie wymagają użycia narzędzi teorii kategorii.

[1] M. D'Anna, C. A. Finocchiaro and M. Fontana, Amalgamated algebras along an ideal, *Commutative Algebra and Applications*, 2009, 155–172

## PRZETASOWANE KWADRATY

Bartłomiej Pawlik

Instytut Matematyki, Politechnika Śląska

e-mail: bpawlik@polsl.pl

Zjawisko powtarzalności fascynowało badaczy z różnych dziedzin nauki od niepamiętnych czasów. Dziedziną zajmującą się m.in. badaniem powtarzających się wzorców w ciągach znaków jest kombinatoryka na słowach. Kwadratem nazywamy słowo postaci  $XX$  (gdzie  $X$  jest dowolnym słowem), np. *hotshots*, czy *011011*. Słowem bezkwadratowym nazywamy słowo, którego nie można zapisać w postaci  $PXXS$ , gdzie  $P$ ,  $X$  i  $S$  są słowami i dodatkowo  $X$  jest słowem niepustym. Przykładem słowa bezkwadratowego jest *matematyka*. Klasyczny wynik Axela Thue'go [3] orzeka, że *istnieje dowolnie długie słowo bezkwadratowe nad trzejelementowym alfabetem*. Wspomniane twierdzenie Thue'go uznawane jest za początek kombinatoryki na słowach — dziedziny z pogranicza matematyki dyskretnej i informatyki teoretycznej, która w ciągu ostatnich stu lat doczekała się wielu fascynujących twierdzeń i zastosowań.

Jednym z relatywnie świeżych obiektów w kombinatoryce na słowach są przetasowane kwadraty wprowadzone przez Henshall, Rampersada i Shallita [2]. Nieformalnie przetasowanym kwadratem nazywamy słowo, które można rozłożyć na dwa rozłączne i identyczne podsłowa. Przetasowanymi kwadratami są zatem kwadraty, ale też słowa takie jak *tuteurer*. Lista wszystkich binarnych przetasowanych kwadratów długości 4 ma sześć elementów:

$$0000, 0011, 0101, 1010, 1100, 1111.$$

Nie wiadomo ile jest binarnych przetasowanych kwadratów, ale jest znana pewna asymptotyka [1].

W referacie omawiamy głównie nowe problemy dotyczące przetasowanych kwadratów i ich uogólnień. Proponujemy kilka hipotez i podajemy pewne wstępne wyniki w ich kierunku. Wykład jest oparty na pracach [4, 5].

[1] X. He, E. Huang, I. Nam, and R. Thaper, Shuffle Squares and Reverse Shuffle Squares, *European Journal of Combinatorics*, 116 (2024) 103883

[2] D. Henshall, N. Rampersad, J. Shallit, Shuffling and Unshuffling, *Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci.*, 2012, 107, 131–142.

[3] A. Thue, Über unendliche Zeichenreihen, *Norske vid. Selsk. Skr. Mat. Nat. Kl.*, 1906, 7, 1–22.

[4] J. Grytczuk, B. Pawlik, M. Pleszczyński, More Variations on Shuffle Squares, *Symmetry*, 2023, 15, 1982.

[5] J. Grytczuk, B. Pawlik, M. Pleszczyński, Variations on Shuffle Squares, *preprint*, arXiv:2308.13882.

## DUALNOŚCI W TOPOLOGII UJARZMIONEJ

Artur Piękosz

Politechnika Krakowska

e-mail: artur.piekosz@pk.edu.pl

Alexander Grothendieck postulował rozwinięcie topologii ujarzmionej (ang. *tame topology*, fran. *topologie modérée*), w której wyeliminowane byłyby patologiczne przestrzenie i odwzorowania. Jeszcze praca [1] mówi, że taka topologia nie została rozwinięta. Proponujemy teorię przestrzeni (lokalnie) małych, która realizuje te postulaty. Pojęcie topologii zostaje tutaj zastąpione bardziej podstawowym pojęciem smopologii.

*Smopologia* na zbiorze  $X$  to rodzina  $\mathcal{L}_X$  podzbiorów zbioru  $X$ , która spełnia trzy następujące proste warunki:

(S1)  $\mathcal{L}_X$  zawiera zbiór pusty,

(S2)  $\mathcal{L}_X$  jest zamknięta na niepuste skończone sumy i przecięcia,

(S3)  $\mathcal{L}_X$  pokrywa zbiór  $X$ .

Elementy  $\mathcal{L}_X$  są nazywane małymi zbiorami otwartymi (*smopami*). Morfizmami zbiorów ze smopologiami, które tutaj nazywamy *przestrzeniami lokalnie małymi*, są odwzorowania ograniczone (obraz smopa jest zawarty w smopie w przeciwdziedzinie) i ciągłe (przeciwbraz smopa jest zgodny ze smopami w dziedzinie). Jeżeli  $X \in \mathcal{L}_X$ , to przestrzeń nazywamy *małą*.

Prezentujemy dualność Stone'a dla takich przestrzeni, która wyjaśnia związek pomiędzy przestrzeniami małymi i przestrzeniami topologicznymi spektralnymi oraz związek pomiędzy przestrzeniami lokalnie małymi i przestrzeniami topologicznymi górnospektralnymi (ang. up-spectral), a odpowiednimi kategoriami krat rozdzielnych ograniczonych z dodatkową strukturą. Główny wariant naszej wersji dualności Stone'a orzeka, że kategoria przestrzeni lokalnie małych Kołmogorowa oraz odwzorowań ciągłych ograniczonych jest równoważna kategorii przestrzeni spektralnych z wyróżnionymi grudami i bornologiami w kratkach podzbiorów otwartych (quasi)zwartych oraz odwzorowaniami spektralnymi respektującymi grudy i spełniającymi pewien warunek ograniczoności, a ponadto obie kategorie są dualnie równoważne kategorii krat rozdzielnych ograniczonych z wyróżnionymi grudami filtrów pierwszych i bornologiami oraz homomorfizmów krat ograniczonych respektujących grudy i spełniających pewien warunek dominacji.

Prezentujemy również dualność Esakii, wyjaśniającą związek pomiędzy przestrzeniami małymi Heytinga i przestrzeniami spektralnymi Heytinga oraz przestrzeniami lokalnie małymi Heytinga i przestrzeniami górnospektralnymi Heytinga, a odpowiednimi kategoriami algebr Heytinga z dodatkową strukturą.

Otrzymujemy następującą tabelkę kategorii, w której kategorie w każdym z wierszy w kolumnach drugiej, trzeciej i czwartej są wzajemnie konkretnie izomorficzne, równoważne kategoriom z pierwszej i piątej kolumny oraz dualnie równoważne kategorii z szóstej kolumny.

<b>SS<sub>0</sub></b>	<b>SpecD</b>	<b>PriD</b>	<b>PSSD</b>		<b>LatD</b>
<b>HSS</b>	<b>HSpecD</b>	<b>EsaD</b>	<b>ESSD</b>		<b>HAD</b>
<b>LSS<sub>0</sub></b>	<b>uSpecD</b>	<b>uPriD</b>	<b>PLSSD</b>	<b>SpecBD</b>	<b>LatBD</b>
<b>HLSS</b>	<b>HuSpecD</b>	<b>uEsaD</b>	<b>ELSSD</b>	<b>HSpecBD</b>	<b>HABD</b>

- [1] N. A'Campo, L. Ji, A. Papadopoulos, On Grothendieck's tame topology, *In: Handbook of Teichmüller Theory, Volume VI*, EMS Press: Berlin, Germany, 2016; Volume 27, pp. 521-533.
- [2] A. Piękosz, Stone duality for Kolmogorov locally small spaces, *Symmetry*, 2021, 13(10), 1791.
- [3] A. Piękosz, Esakia duality for Heyting small spaces, *Symmetry*, 2022, 14(12), 2567.
- [4] A. Piękosz, Heyting locally small spaces and Esakia duality, *Symmetry*, 2023, 15(7), 1342.

O PEWNYCH ASPEKTACH TEORII DE RHAM'A-HODGE'A ORAZ  
CAŁKOWALNYCH WIELOWYMIAROWYCH UKŁADACH RÓŻNICZKOWYCH  
NA ROZMAITOŚCIACH RIEMANNA

**Anatolij K. Prykarpatski**

Politechnika Krakowska, Polska, oraz Politechnika Lwowska, Ukraina

e-mail: [pryk.anat@cybergal.com](mailto:pryk.anat@cybergal.com)

**Radosław A. Kycia**

Politechnika Krakowska, Polska, oraz Uniwersytet Masaryka, Republika Czeska

e-mail: [radoslaw.kycia@pk.edu.pl](mailto:radoslaw.kycia@pk.edu.pl)

Rozważamy gładką skończenie-wymiarową rozmaitość Riemanna  $M$  and dwie wiązki liniowe na niej: styczną wiązkę  $T(M)$  oraz liniową wiązkę  $E(M)$ , wyposarzoną o strukturę Euklidesową z iloczynem skalarnym  $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$  na liniowych włóknach  $E$ . Odpowiednie pola wektorowe na  $M$  są poznażczane jako  $\mathcal{T}(M)$ , a gładkie przekroje  $E(M)$  jak  $\mathcal{E}(M)$ . Jak zazwyczaj, możemy wprowadzić na  $E(M)$  koneksję Cartan'a  $\Gamma$  za pomocą odwzorowania

$$d_A : \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{T}^*(M) \otimes \mathcal{E}(M) \simeq \text{Hom}(\mathcal{T}(M); \mathcal{E}(M)), \quad (1)$$

które spełnia takie własności:

$$d_A(f\alpha + \beta) := df \otimes \alpha + fd_A\alpha + d_A\beta \quad (2)$$

dla dowolnej gładkiej funkcji  $f \in D(M)$  and  $\alpha, \beta \in E(M)$ . Let  $\Lambda(M) := \bigoplus_{p=0}^{\dim M} \Lambda^p(M)$  oznacza zwykłą algebrę Grassmann'a form różniczkowych na  $M$ . Jeśli zdefiniować odpowiednią wiązkę liniową  $\Lambda^p(M, E) := \Lambda^p(M) \otimes E(M)$  dla  $p = \overline{0, m}$ , odwzorowanie koneksji (1) w sposób naturalny przedłuża się na  $\Lambda^p(M, E)$  jako

$$d_A : \Lambda^p(M, E) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M, E), \quad (3)$$

spełniając odpowiednie prawo Leibniza:

$$d_A(f^{(p)} \wedge \alpha^{(q)}) := df^{(p)} \wedge \alpha^{(q)} + (-1)^p f^{(p)} \wedge d_A\alpha^{(q)} \quad (4)$$

dla wszystkich  $f^{(p)} \in \Lambda^p(M)$  and  $\alpha^{(q)} \in \Lambda^q(M, E)$ ,  $q, p = \overline{0, m}$ .

Operacja koneksji (3) posiada wiele ciekawych oraz bardzo ważnych własności: jej złożenie  $d_A^2 := d_A d_A$  jest owzorowaniem liniowym nad pierścieniem gładkich funkcji  $D(M)$  :

$$d_A^2(f\alpha^{(p)} + \beta^{(p)}) = fd_A^2\alpha^{(p)} + d_A^2\beta^{(p)}, \quad (5)$$

gdzie  $f \in D(M)$  oraz  $\alpha^{(p)}, \beta^{(p)} \in \Lambda^p(M, E)$ ,  $p = \overline{0, m}$ , są dowolne. Otrzymane liniowe odwzorowanie tensorowe  $\Omega^{(2)} := d_A^2 : \mathcal{E}(M) \rightarrow \Lambda^2(M, E)$  nazywa się tensorem krzywizny i jest bardzo ważnym dla analizy geometrycznej całkownych wielo-wymiarowych układów różniczkowych [1] typu M. Gromov'a, generowanych przez całkowne ideały Cartan'a  $I(\alpha) \subset \Lambda(M, \text{End}E) := \Lambda(M) \otimes \text{End} E(M)$  na rozmaitosci Riemanna  $M$ . Ponadto, można skonstruować gładkie odwzorowanie zanurzenia dla podrozmaitości całkownej  $i_\alpha : M_\alpha \rightarrow M$  ideała  $I(\alpha) \subset \Lambda(M, \text{End}E)$ , zadowalającego następnym warunkiem określającym: 2-forma krzywizny  $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(M, E)$  zredukowana na podrozmaitość  $M_\alpha$  jest zerowana, to jest  $i_\alpha^* \Omega^{(2)} = 0$ . Ostatnie oznacza również, że skojarzony zredukowany łańcuch

$$E \rightarrow \Lambda^0(M_\alpha, E) \xrightarrow{d_\alpha} \Lambda^1(M_\alpha, E) \xrightarrow{d_\alpha} \dots \Lambda^{m_\alpha}(M_\alpha, E) \xrightarrow{d_\alpha} 0 \quad (6)$$

jest kompleksem de Rham'a, to jest  $d_\alpha^2 = 0$ , gdzie, na mocy definicji,  $d_\alpha := i_\alpha^* d_A$  oraz  $m_\alpha := \dim M_\alpha$ . Ponieważ podrozmaitość  $M_\alpha \subset M$  naśladuje indukowaną strukturę Riemanna  $g_\alpha : T(M_\alpha) \times T(M_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ , my możemy skonstruować z kompleksu (6) a odpowiednio uogólniony de Rham-Hodge kompleks [2,3] przestrzeni Hilberta  $H_\Lambda^p(M_\alpha)$ ,  $p = \overline{0, m_\alpha}$ , którego własności dają możliwość opisanie tak nazywane operatory transmutacji Delsarte-Lions'a typu Volterra, służących dla konstruowania wielo-wymiarowych układów różniczkowych na rozmaitościach Riemann'a oraz znalezienia specjalnych ich rozwiązań.

Z drugiej strony można rozważyć następujący uogólniony łańcuch modułów na  $M$  :

$$E \rightarrow \Lambda^0(M, E) \xrightarrow{d_A} \Lambda^1(M, E) \xrightarrow{d_A} \dots \xrightarrow{d_A} \Lambda^m(M, E) \rightarrow 0, \quad (7)$$

który, oczywiście, nie jest kompleksem de Rham-Hodge'a, jednak wyznacza takie ważne objekty geometryczne jak klasy charakterystyczne Chern'a oraz ich charaktery. Ich własności oraz powiązane aspekty geometryczne problemu całkowalności wielo-wymiarowych układów różniczkowych typu M. Gromov'a [1] na rozmaitościach Riemanna są traktowane w naszej prezentacji. Następnym wzór definiuje skojarzone z kompleksem (7) klasy charakterystyczne Chern'a grupy ko-homologii

$$ch_j(A) = tr(\Omega^{(2)})^j \in \Lambda^{2j}(M) \quad (8)$$

dla  $j \in \mathbb{Z}_+$ , określonych globalnie na  $M$ . Ponieważ wszystkie różniczkowe  $2j$ -formy  $ch_j(A) \in \Lambda^{2j}(M)$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ , są domknięte, to jest  $d ch_j(A) = 0$ , oraz klasy kohomologii de Rhama  $[ch_j(A)] \in H^{2j}(M, R)$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ , nie zależą od wyboru odwzorowania koneksji (1) oraz od wyboru hermitowskiej metryki na  $E$ , one okazują się decydujące w zastosowaniu do klasyfikacji całkowalnych układów różniczkowych na rozmaitościach Riemanna. Szczególnie, dla przypadku silnie całkowalnych układów różniczkowych na rozmaitościach Riemanna my rozważamy scenario geometryczne a la Cartan'a, w ramach którego badany wielo-wymiarowy różniczkowy układ  $\hat{\alpha}$  jest przedstawiany w postaci całkowalnego ideała Cartan'a  $I(\alpha) \subset \Lambda(M, End E)$  ze współczynnikami  $End \mathcal{E}(M)$ , gdzie  $\mathcal{E}(M)$  jest tutaj specjalnie wzięta liniowa wiązka Hermite'a nad rozmaitością Riemann'a  $M$ . Odpowiednia podrozmaitość całkowana  $M_\alpha \subset M$  ideała  $I(\alpha)$ , w przypadku ogólnym, jest lokalnie równoważna zbioru zmiennych niezależnych naszego wielo-wymiarowego całkowalnego różniczkowego układu.

Jeśli całkowalny wielo-wymiarowy nieliniowy układ  $\hat{\alpha}$  jest równoważny całkowalnemu ideałowi Cartana  $I(\alpha) \subset \Lambda(M, End E)$  na rozmaitosci Riemanna  $M$ , który spełnia warunki  $H^{2j}(M, R) = 0$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ , wtedy on posiada skończoną ilość niezmienników typu Cherna na odpowiedniej całkowalnej podrozmaitości  $M_\alpha \subset M$  ideała  $I(\alpha)$ . Jeśli te niezmienniki różniczkowe są nietrywialne, one opisują, w szczególności, skojarzoną przestrzeń modułów liniowej wiązki włóknistej  $E(M)$ .

Jest korzystnym tutaj odnotować, że większą część niezmienników różniczkowych  $\chi_j(A)$ , gdzie na mocy definicji,  $ch_j(A) = d\chi_j(A)$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ , redukują się dla  $j \geq [\dim M_\alpha/2] + 1$  do tżsamościowego zera. W szczególności, dla przypadku wielowymiarowych całkowalnych nieliniowych układów, dla których  $\dim M_\alpha = 2$  lub  $3$  lekko otrzymujemy, że może istnieć tylko jeden niezmiennik różniczkowy w ogóle. Ponadto, jeśli dla takich różniczkowych układów odpowiednie grup Liego strukturalne są specjalne liniowe macierzowe, dla których algebry Liego są bezśladowe, otrzymujemy odrazu, że niezmienników w ogóle nie istnieje na  $M_\alpha$ .

Ten wynik jest wystarczająco pouczający co do teorii matematycznej geometrycznie całkowalnych wielo-wymiarowych nieliniowych układów różniczkowych, które posiadają



odpowiednie odwzorowania koneksji na  $\Lambda(M, E)$  przy dodatkowych kohomologicznych ograniczeniach  $H^{2j}(M, R) = 0$ ,  $j \in Z_+$ . Mianowicie, dla wielo-wymiarowego przypadku  $\dim M_\alpha \geq 4$  można wykazać, że nietrywialne niezmienniki różniczkowe istnieją. Ostatnie powoduje, w szczególności, że mogą istnieć pewne topologiczne przeszkody. Rzeczywiście, istnienie nietrywialnego niezmiennika różniczkowego powoduje odrazu warunki, że kohomologii  $H^s(M, R) \neq 0$  dla  $s \in Z_+$ , tak więc będąc w sprzeczności do zerowości grup kohomologii przy tych wartościach  $s \in Z_+$ . Z drugiej strony, jeśli a priori  $H^{2s}(M, R) \neq 0$  dla niektórych  $s \in Z_+$ , odpowiednie klasy charakterystyczne Cherna  $ch_s(E, M)$  dla tych  $s \in Z_+$  są, w ogólnym przypadku, śrogo nietrywialne, więc definiując  $(2s - 1)$ -formy różniczkowe  $\chi_s(A) \in \Lambda_{loc}^{2s-1}(M)$  tylko lokalnie na mocy odpowiedniego lematu Poincarego. Te lokalne formy różniczkowe, jeśli zredukowane na podrozmaitość  $M_\alpha \subset M$ , prowadzą do zbiorów wielowartościowych kwazi-niezmienników  $\chi_s(A) \in \Lambda_{loc}^{2s-1}(M_\alpha)$ , gdzie  $d\chi_s(A) = 0$ , których istnienie może oznaczać, w szczególności, że nasz nieliniowy układ różniczkowy jest w pewnym sensie źle postawiony. Warto odnotować tutaj, że istnieją inne powiązane różniczkowe struktury, które mogą być badane za pomocą odpowiednich kompleksów de Rham-Hodge'a (6). Te aspekty będą też krótko omówione w naszym referacie.

[1] M. Gromov, *Partial differential relations*, Springer, NY, 1986

[2] D. Blackmore, A.K. Prykarpatsky and V.H. Samoilenko, *Nonlinear dynamical systems of mathematical physics*, World Scientific Publisher, NJ, USA, 2011

[3] N. Bogoliubov, Ya.A. Prykarpatsky, A.M. Samoilenko, and A.K. Prykarpatski, A generalized de Rham-Hodge theory of multi-dimensional Delsarte transformations of differential operators and its applications for nonlinear dynamic systems, *Physics of Particles and Nuclei*, 2005, 36(1), 1110–121

## GRUPY, GRAFY I GRUPOIDY

Aneta Sliżewska

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: anetas1@uwb.edu.pl

Prezentacja ma na celu przedstawienie pojęcia grupoidu i podstawowe jego zastosowania w konstrukcjach geometrycznych. Zostanie przedstawiony naturalny związek grupoidu z działaniem grupy na zbiorze, grupoid stowarzyszony wiązki głównej, grupoid topologiczny. Traktowanie grupoidu jako multigrafu o ustalonych własnościach pozwala na podjęcie próby charakteryzacji podgrupoidów danego grupoidu, ze szczególnym uwzględnieniem uogólnienia twierdzenia Lagrange'a oraz twierdzenia Sylowa dla grupoidów skończonych.

[1] G. Beier, Ch. Garcia, W. G. Lautenschlaeger, J. Pedrotti, T. Tamusiunas, Generalizations of Lagrange and Sylow Theorems for Groupoids, *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, Volume 17 (2023), pages 720–739

[2] A. Cannas da Silva, A. Weinstein, Geometric Models for Noncommutative Algebras, *American Mathematical Society*, 1999

[3] A. Odziejewicz, A. Sliżewska, Banach-Lie groupoids associated to  $W^*$ -algebras, *Symplectic Geom.*, 14 (2016), no. 3, 687-736

## NIEREDUKOWALNE RODZINY PODGRUP MAKSYMALNYCH W GRUPACH SKOŃCZONYCH

Agnieszka Stocka

Uniwersytet w Białymstoku, Wydział Matematyki

e-mail: stocka@math.uwb.edu.pl

Niech  $G$  będzie grupą skończoną oraz  $I = \{1, \dots, n\}$ . Rodzinę  $\mathcal{M} = \{M_i : i \in I\}$  maksymalnych podgrup grupy  $G$  będziemy nazywać *nieredukowalną (w położeniu ogólnym)*, jeśli dla każdego  $i \in I$

$$\bigcap_{j \in I} M_j < \bigcap_{i \neq j \in I} M_j.$$

Możemy zauważyć, że pojęcie to jest analogiczne do pojęcia hiperpłaszczyzn w położeniu ogólnym.

Celem referatu jest przedstawienie własności nieredukowalnych rodzin grup skończonych oraz własności następujących niezmienników:

- $Maxdim(G)$  - wymiar maksymalny grupy  $G$  - mocy największej nieredukowalnej rodziny podgrup maksymalnych  $G$ ,
- $Mindim(G)$  - wymiar minimalny grupy  $G$  - mocy najmniejszej nieredukowalnej rodziny podgrup maksymalnych  $G$ ,
- $\alpha(G)$  - najmniejsza liczba podgrup maksymalnych grupy  $G$ , których przecięcie jest równe przecięciu wszystkich podgrup maksymalnych  $G$ .

Pierwsze rezultaty dotyczące zbiorów nieredukowalnych pojawiły się w pracy [1] i kontynuowanie były w licznych artykułach m. in. [2,3].

[1] R. Fernando, On an inequality of dimension-like invariants for finite groups, *preprint*, ArXiv:1502.00360, 2015.

[2] A. Lucchini, Maximal Intersections in Finite Groups, *Mediterr. J. Math.*, 2022, **19**, 34

[3] A. Stocka, Irredundant families of maximal subgroups of finite solvable groups, *Int. J. Group Theory*, (2023), 12 no. 3, 163–176.

## PORZĄDKI STOCHASTYCZNE A NIERÓWNOŚCI FUNKCYJNE

**Tomasz Szostok**

Uniwersytet Śląski w Katowicach  
e-mail: tomasz.szostok@us.edu.pl

W pracy [2] Teresa Rajba zauważyła, że nierówność Hermite'a-Hadamarda

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t)dt \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

(spełniona przez wszystkie funkcje wypukłe) wynika natychmiastowo z lematu Ohlina z pracy [1]. Podejście to okazało się owocne i pozwoliło nie tylko uprościć dowody, ale też istotnie rozszerzyć wiedzę na temat nierówności funkcyjnych. W referacie przedstawiamy inne wyniki dotyczące porządków stochastycznych oraz omawiamy ich zastosowanie.

[1] J. Ohlin, On a class of measures of dispersion with application to optimal reinsurance, *ASTIN Bulletin*, (1969) 5 (1969), 249–266.

[2] T. Rajba, On The Ohlin lemma for Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities, *Math. Ineq. Appl.*, 2014, 17 Number 2, 557–571

KIEDY ASYMPTOTYCZNIE STABILNA PÓŁGRUPA MARKOWA MA  
E-WŁASNOŚĆ?**Ryszard Kukulski**Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej,  
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie  
e-mail: ryszard.kukulski@gmail.com**Hanna Wojewódka-Ściążko**Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach;  
Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk  
e-mail: hanna.wojewodka@us.edu.pl

Operatory Markowa działające na miarach, a także rodziny tych operatorów, tworzące półgrupy (tzw. półgrupy Markowa), w naturalny sposób wywodzą się od procesów Markowa (odpowiednio: z czasem dyskretnym i ciągłym). Dzięki nim możemy opisywać dynamikę rozkładów tychże procesów. Zwróćmy uwagę, że w naszych pracach [1] i [2] rozważamy dość ogólne przestrzenie stanów, a konkretnie - polskie (a więc zupełne i ośrodkowe) przestrzenie metryczne stanów, które niekoniecznie muszą być lokalnie zwarte. Przejście od przestrzeni (lokalnie) zwartych do przestrzeni polskich nie jest prostym uogólnieniem (zauważmy, że kula w takich przestrzeniach nie musi być zwarta). Jak podkreślają wybitni matematycy, tacy jak M. Hairer [3, 4] czy A. Lasota [5], stanowi to znaczący postęp jakościowy.

Badania nad istnieniem i jednoznacznością rozkładów stacjonarnych procesów Markowa, a także zbieżnością rozkładów tychże procesów do ich jedynych rozkładów stacjonarnych, niezależnie od ich rozkładów początkowych (asymptotyczna stabilność), trwają od lat. Aby udowodnić te (i inne) właściwości ergodyczne, wprowadzono różne techniki odwodzące się do równości (ang. equicontinuity) rodzin operatorów Markowa. Początkowo tego rodzaju techniki rozwijano na potrzeby analizy procesów Markowa o wartościach w zwartych przestrzeniach metrycznych [6] lub lokalnie zwartych podprzestrzeniach przestrzeni Hausdorffa [7]. Później ewoluowały one tak, aby mogły służyć także do badania asymptotyki procesów określonych na polskich przestrzeniach metrycznych (zob. np. [8]).

W literaturze przedmiotu znajdziemy pojęcia takie jak e-własność (ang. e-property) [9], asymptotyczna e-własność (ang. eventual e-property) [10], Cesáro e-własność (ang. Cesáro e-property) [11] i inne.

Asymptotyczna stabilność, zwłaszcza osiągnięta w tempie wykładniczym, jest jedną z najbardziej pożądanymi własnościami ergodycznymi, jednak dopiero dodatkowo spełniona e-własność gwarantuje, że pewne błędy numeryczne w symulacjach można traktować jako pomijalne. Powstaje zatem naturalne pytanie: „Czy e-własność może wynikać wyłącznie z asymptotycznej stabilności?”. W ogólności odpowiedź na to pytanie jest negatywna. W [12] autorzy definiują operator Markowa-Fellera, który jest asymptotycznie stabilny i jednocześnie nie spełnia e-własności. Ponadto dowodzą oni, że każdy asymptotycznie stabilny operator Markowa-Fellera, którego niezmiennicza miara probabilistyczna ma nośnik o niepustym wnętrzu, spełnia e-własność (por. [1]).

Nasz główny wynik [2] jest podobny w duchu do powyższego stwierdzenia, ale dotyczy ciągłych półgrup Markowa. Różnica polega na tym, że w przypadku ciągłych półgrup Markowa koniunkcja własności Fellera, asymptotycznej stabilności i niepustości wnętrza nośnika miary niezmienniczej nie są wystarczające do zagwarantowania e-własności (zob.

kontrprzykłady podane w [2]). Założenia te implikują jedynie asymptotyczną e-własność, to znaczy e-własność, która zachodzi od pewnego momentu w czasie, a nie w całym przedziale czasowym  $[0, \infty)$ . Aby udowodnić e-własność, należy przyjąć dodatkowe założenie o silnej ciągłości stochastycznej (ang. strong stochastic equicontinuity), zdefiniowanej tak jak w [13]. Dokładniej rzecz ujmując, w [2] dowodzimy, że dowolna silnie stochastycznie ciągła półgrupa Markowa, która ma asymptotyczną e-własność, ma również e-własność. Co ciekawe, założenia o silnej ciągłości stochastycznej nie można osłabić do ciągłości stochastycznej, w której zbieżność w normie supremum jest zastąpiona zbieżnością punktową.

- [1] R. Kukulski, H. Wojewódka-Ściążko, The e-property of asymptotically stable Markov-Feller operators, *Colloq. Math.*, 2021, 165, 269–283.
- [2] R. Kukulski, H. Wojewódka-Ściążko, The e-property of asymptotically stable Markov semigroups, *Results Math.*, 2024, 79(112).
- [3] M. Hairer, Exponential mixing properties of stochastic PDEs through asymptotic coupling, *Probab. Theory Related Fields*, 2002, 124.
- [4] M. Hairer and J.C. Mattingly, Spectral gaps in Wasserstein distances and the 2D stochastic Navier-Stokes equations, *Ann. Probab.*, 2008, 36(6), 2050–2091.
- [5] A. Lasota, From fractals to stochastic differential equations, In: P. Garbaczewski, M. Wolf and A. Weron, Chaos - The interplay between stochastic and deterministic behaviour (Proceedings of the XXXIst Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, Poland, 13–24 Feb 1995), volume 457 of Lecture Notes in Physics, pages 235–255, *Springer Verlag*, Berlin, 1995.
- [6] B. Jamison, Asymptotic behaviour of successive iterates of continuous functions under a Markov operator, *J. Math. Anal. Appl.*, 1964, 9, 203–214.
- [7] S.P. Meyn, R.L. Tweedie, Markov chains and stochastic stability, *Springer*, London, 2012.
- [8] A. Lasota, T. Szarek, Lower bound technique in the theory of a stochastic differential equation, *J. Differ. Equ.*, 2006, 231, 513–533.
- [9] T. Szarek, D.T.H. Worm, Ergodic measures of Markov semigroups with the e-property, *Ergod. Theory Dyn. Syst.*, 2011, 32(3), 1117–1135.
- [10] D. Czapla, A criterion of asymptotic stability for Markov-Feller e-chains on Polish spaces, *Ann. Polon. Math.*, 2012, 105(3), 267–291.
- [11] D.T.H. Worm, Semigroups on spaces of measures, PhD. thesis, *Mathematical Institute, Faculty of Science, Leiden University, The Netherlands*, available at: <https://math.leidenuniv.nl/scripties/WormThesis.pdf>, Leiden, 2010.
- [12] S.C. Hille, T. Szarek, M. Ziemiańska, Equicontinuous families of Markov operators in view of asymptotic stability, *C. R. Math.*, 2017, 355(12), 1247–1251.
- [13] S.N. Ethier, T.G. Kurtz, Markov processes: characterization and convergence, Wiley series in probability and mathematical statistics: probability and mathematical statistics, *Wiley*, New York, 1986.





ISBN 978-83-962157-5-8



Michał Baczyński, Jacek Miękiś, Maciej Sablik (Eds.)  
Książka streszczeń 9. FORUM MATEMATYKÓW POLSKICH